

2021, e3a, MP, Exercice 2:

endomorphisme symétrique et inverse généralisé

1

$n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ espace euclidien de dimension n

On note id_E identité de E et 0 endomorphisme nul de E .

Soit f un endomorphisme symétrique de E non inversible et non nul

1.1) Si f est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E , alors il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de f .

1.2) Comme E est de dimension finie et que f est supposée non inversible alors f n'est pas injective : il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $f(x) = 0_E = 0$. x donc 0 est valeur propre.

• Supposons par l'absurde que toutes les vap de f sont nulles.

Par le thm spectral, sa matrice dans une base de vecteurs propres est la matrice nulle donc f est l'endomorphisme nul, ce qui n'est pas possible par hypothèse.

Ainsi, f admet au moins une vap non nulle

1.3) Pour $x \in \text{Ker}(f)$ et $y \in \text{Im}(f)$, $f(x) = 0$ et il existe $z \in E$ tel que $y = f(z)$ et comme f est symétrique, on a :

$$(x|y) = (x|f(z)) = (f(x)|z) = (0|z) = 0 \text{ d'où } \underline{\text{Ker}(f) \perp \text{Im}(f)}$$

En particulier, $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ [car pour $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$

on a $\|x\|^2 = (x|x) = (f(x)|f(x)) = (0|0) = 0$ donc $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \subset \{0\}$ et on a égalité

Car l'intersection de $\text{seu de } E$ est un $\text{seu de } E$ donc $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont en somme directe. (2)

• De plus, le thm du rang nous donne $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$
 $= \dim(\text{Ker } f \oplus \text{Im } f)$

d'où $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ et ils sont bien supplémentaires.

On suppose désormais que f admet exactement $k+1$ vap $\lambda \neq 0$ distinctes $(\lambda_j)_{j \in [0, k]}$ avec : $k \geq 1, \lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_k|$

Pour tout $j \in [0, k]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la vap λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j .

1.4) Commençons par remarquer que le théorème spectral nous donne la décomposition de E en somme directe orthogonale des sous-espaces propres E_j : $E = \bigoplus_{j=0}^k E_j$

(ce qui justifie au passage l'introduction des projecteurs orthogonaux p_j dans l'énoncé)

Soit $x \in E$. Il existe un unique $(k+1)$ -uplet $(x_j)_{0 \leq j \leq k} \in \bigoplus_{j=0}^k E_j$ tels que $x = \sum_{j=0}^k x_j$ et, par déf, $x_j = p_j(x)$ d'où $\text{Id}_E(x) = x = \sum_{j=0}^k p_j(x)$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a : $\text{id}_E = \sum_{j=0}^k p_j$

1.5) Soit $(i, j) \in [0, k]^2$ tels que $i \neq j$.

Pour $x \in E$, comme ci-dessus $x = \sum_{j=0}^k x_j$ et $p_i \circ p_j(x) = p_i(x_j) = 0 = \theta(x)$

car $x_j \in E_j$ et p_i est la projection orthogonale sur E_i , $i \neq j$.

d'où $p_i \circ p_j = \theta$

1.6) On a montré que $\text{id}_E = \sum_{j=0}^k p_j$ à la question 1.4. En composant par f :

$$f = \sum_{j=0}^k (f \circ p_j), \text{ Or pour tout } x \in E, (f \circ p_j)(x) = f(x_j) = \lambda_j x_j = \lambda_j p_j(x)$$

d'où $f = \sum_{j=0}^k \lambda_j p_j$.

(3)

1.7) Soit p le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(f)$.

Par définition, $E_0 = \text{Ker}(f)$.

D'après la question 1.3, $\text{Ker}(f)^\perp = \text{Im}(f)$ et d'après le thm spectral, $(E_0)^\perp = \bigoplus_{j=1}^k E_j$ (voir question 1.4) d'où $\text{Im}(f) = \bigoplus_{j=1}^k E_j$.

Pour $x \in E$, $x = \sum_{j=0}^k x_j$ avec $x_j \in E_j$, on a :

$$p(x) = p\left(\underbrace{x_0}_{\in \text{Ker } f} + \underbrace{\sum_{j=1}^k x_j}_{\in \text{Im } f}\right) = \sum_{j=1}^k x_j = \sum_{j=1}^k p_j(x) \Rightarrow \underline{p = \sum_{j=1}^k p_j}$$

On note $f^\pi = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} p_j$ "inverse généralisée de f "

$$\begin{aligned} 2.1) \underline{f \circ f^\pi} &= \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i p_i \right) \circ \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} p_j \right) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \underbrace{p_i \circ p_j}_{=0 \text{ si } j \neq i} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_i} p_i \circ p_i = \sum_{i=1}^k p_i \text{ (car } p_i \text{ projecteur)} \\ &= \underline{p} \text{ (question 1.7)} \end{aligned}$$

• Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\underline{f(y) = p(y)} \Leftrightarrow f(y) = f \circ f^\pi(y) \Leftrightarrow f(x - f^\pi(y)) = 0 \Leftrightarrow \underline{x - f^\pi(y) \in \text{Ker}(f)}$$

2.2) Soit $y \in E$. Pour $x \in E$, on a :

$$\underline{\|f(y) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\|} \Leftrightarrow \|f(y) - y\| = \inf_{z \in \text{Im } f} \|z - y\|$$

$\Leftrightarrow f(x) = p(y)$ [c'est le ~~point~~ qui minimise la distance de y au $\text{Im } f$]

$\Leftrightarrow x - f^\pi(y) \in \text{Ker}(f)$ par la question 2.1

question 3 "étude d'un exemple" n'est pas compliquée, juste calculatoire