

Exercice : Étude d'extremums

Objectif : Étudier les extremums de f , définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Q1) La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (par somme de telles fonctions)

Les points critiques sont les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ solutions de :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par définition, $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$

On se ramène donc à résoudre le système suivant :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

Pour cela, on effectue un raisonnement d'analyse-synthèse :

• Analyse : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ solution du système.

On a $x = y^2 = (x^2)^2 = x^4$ donc x vérifie $x^4 - x = 0$ soit $x(x^3 - 1) = 0$
donc $x \in \{0, 1\}$. Comme $y = x^2$, $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}$.

• Synthèse : On remarque que les deux points trouvés ci-dessus vérifient le système.

↳ on en déduit que les points critiques de f sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

- Q2) • Pour $x < 0$, $(x, 0)$ vérifie $f(x, 0) = x^3 < 0$
 • Pour $x > 0$, $(x, 0)$ vérifie $f(x, 0) = x^3 > 0$

Or $f(0, 0) = 0$. Au voisinage de ce point, on peut trouver des valeurs strictement positives et négatives donc :

Le point critique $(0, 0)$ ne peut pas être un extremum local

Q3). Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Calculons :

$$\begin{aligned} g(u, v) &= f(1+u, 1+v) - f(1, 1) = (1+u)^3 + (1+v)^3 - 3(1+u)(1+v) - (-1) \\ &= (1+3u+3u^2+u^3) + (1+3v+3v^2+v^3) - 3(1+u+v+uv) + 1 \\ &= u^3 + v^3 + 3(u^2 + v^2) + 3(u+v-u-v-uv) \\ &= u^3 + v^3 + 3(u^2 + v^2 - uv) \end{aligned}$$

• Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On calcule en s'appuyant sur l'expression au dessus :

$$g(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) + 3r^2 (1 - \cos \theta \sin \theta)$$

Q4) Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Comme $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ et $-1 \leq \sin \theta \leq 1$, on obtient $\cos^3 \theta + \sin^3 \theta \geq -2 \geq -6$ et une formule de trigonométrie permet d'obtenir : $\cos \theta \sin \theta = \frac{\sin(2\theta)}{2} \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } g(r \cos \theta, r \sin \theta) &\geq -6r^3 + 3r^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &\geq -6r^3 + \frac{3r^2}{2} \end{aligned}$$

$$\underline{g(r \cos \theta, r \sin \theta) \geq 3r^2 \left(\frac{1}{2} - 2r\right)}$$

Soit $(x, y) \in B\left((1, 1), \frac{1}{4}\right)$ (boule centrée en $(1, 1)$ et de rayon $\frac{1}{4}$)

En passant aux coordonnées polaires, il existe $r \in [0, \frac{1}{4}]$, $\theta \in \mathbb{R}$

tels que $(x-1, y-1) = (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$.

(3)

$$\text{Par conséquent, } f(x, y) - f(1, 1) = g(x-1, y-1) = g(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) \\ \geq 3r^2 \left(\frac{1}{2} - 2r \right) \geq 0$$

donc pour tout $(x, y) \in B((1, 1), \frac{1}{4})$, $f(x, y) \geq f(1, 1)$. ≥ 0 car $r < \frac{1}{4}$

On en déduit que le point critique $(1, 1)$ est un minimum local

Q5). On sait que les extrema locaux sont des points critiques et d'après Q2/Q4, f n'a pas de maximum local donc pas de maximum global.

• Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = -\infty$, la fonction ne peut pas avoir de minimum global.

• Ainsi, f ne possède pas d'extrema globaux.