

Exercice 3 : La constante d'Euler

Partie I

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\Delta_n := u_n - u_{n-1}$

Q28) Pour tout $n \geq 2$, on calcule explicitement :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n-1) \right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

Rappelons un développement limité : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $x \rightarrow 0$

$$\text{Ainsi : } \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{(n-1)^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \Delta_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{(n-1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{2(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{(n-1)^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{1}{n(n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \text{ et } \frac{1}{(n-1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \left[\text{qui donne, au passage,} \right. \\ \left. \text{que } o\left(\frac{1}{(n-1)^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$\text{Par conséquent : } \Delta_n = -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{ou encore, par définition de l'équivalent : } \Delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a}{n^2} \text{ avec } a = \frac{1}{2} > 0$$

Q29) Comme $\Delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ et que la suite $\left(-\frac{1}{2n^2}\right)_{n \geq 2}$ garde un

signe constant, le théorème de comparaison s'applique :

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann), on (2)
 en déduit que $\sum_{n \geq 2} \Delta_n$ est convergente.

Q30) Pour $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \Delta_k = \sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_1$ (somme télescopique)

Ainsi, $u_n = u_1 + \sum_{k=2}^n \Delta_k$ et, d'après Q29, $\left(\sum_{k=2}^n \Delta_k\right)_{n \geq 2}$ est convergente
 donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge

Partie II

• On note $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in \mathbb{R}$ [constante d'Euler]

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in]0, +\infty[$, $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$

Q31) Soit $t \in]0, +\infty[$ fixé. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$
 tel que pour tout $n \geq n_0$, $n > t$ et donc :
 $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$

Q32) Fixons $t \in]0, +\infty[$. Par la question précédente, pour tout $n \geq n_0$,
 $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \ln(t)$.

Or $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \times \left(-\frac{t}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -t$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = e^{-t} \ln(t)$

Par conséquent : $f_n \xrightarrow{\text{cvs}} (t \mapsto e^{-t} \ln(t))$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Q33) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

* Pour $0 < t < m$, on applique l'inégalité donnée dans l'énoncé pour
 $x = -\frac{t}{m} > -1$: $\ln\left(1 - \frac{t}{m}\right) \leq -\frac{t}{m}$.

En multipliant par $m > 0$ et en appliquant la fonction exponentielle
 (fonction croissante), on trouve : $\left(1 - \frac{t}{m}\right)^m \leq e^{-t}$

(3)

D'où : $|f_n(t)| = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n |\ln(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$

* Pour $t \geq n$, $f_n(t) = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

$\hookrightarrow$ Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$

Q34). La fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est continue donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$. On s'intéresse donc à l'intégrabilité de la fonction aux deux extrémités de l'intervalle.

• Au voisinage de 0 : $e^{-t} \ln(t) \sim \ln(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \ln t = 0$

donc il existe $t_0 > 0$ tel que pour $t \in]0, t_0[$, $|\sqrt{t} \ln t| \leq 1$

donc $|\ln t| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$. Or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 (intégrale de Riemann) donc, par domination, $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0

et, de plus, garde un signe constant au voisinage de 0, donc $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est aussi intégrable en 0 par comparaison.

• Au voisinage de $+\infty$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t} \ln(t) = 0$ donc il existe $M > 0$ tel que pour $t \geq M$, $|t^2 e^{-t} \ln(t)| \leq 1$ d'où $|e^{-t} \ln(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann) donc il en est de même pour $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$

Finalement : la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

Q35) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n := \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt$
et $J_n := \int_0^1 u^n \ln(1-u) du$.

Par Q33, $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in]0, +\infty[$, $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$

Par Q34, $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ intégrable sur $]0, +\infty[$. Par domination, f_n l'est aussi donc I_n est convergente

Q36) Il s'agit de vérifier les hypothèses du thm de convergence dominée.

- $\forall t \in]0, +\infty[$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t} \ln(t)$ par Q32
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in]0, +\infty[$, $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$ par Q33
- La domination $t \mapsto e^{-t} |\ln(t)|$ est intégrable par Q34

Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$$

Q37) Les deux fonctions $u \mapsto \frac{u^{n+1}-1}{n+1}$ et $u \mapsto \ln(1-u)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et : ~~$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^{n+1}-1}{n+1} \ln(1-u) = 0$~~

$$\frac{(u^{n+1}-1)}{n+1} \ln(1-u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{(u^{n+1}-1)}{n+1} u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{(u^{n+1}-1)}{n+1} \ln(1-u) \underset{u \rightarrow 1}{\sim} (u-1) \ln(1-u) \xrightarrow{u \rightarrow 1} 0$$

car $(1+\varepsilon)^{n+1} = 1 + (n+1)\varepsilon + o(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} (n+1)\varepsilon$ pour l'équivalent
et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ pour la limite

D'après le théorème d'intégration par parties pour intégrales impropres, les intégrales $I_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u) du$ et $-\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1} du$ sont de même nature.

Or, $u^{n+1}-1 = (u-1) \sum_{k=0}^n u^k$ donc $u \mapsto \frac{u^{n+1}-1}{u-1}$ est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1} du$ converge et on obtient la convergence de l'intégrale I_n . De plus, on a les égalités :

$$I_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1} du = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n u^k \right) du$$

(5)

Par linéarité de l'intégrale [somme finie], on trouve:

$$\underline{I_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \left(\int_0^1 u^k du \right) = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k}}$$

Q38) On fait le changement de variable " $u = 1 - \frac{t}{n} = \frac{n-t}{n}$ "
(ou encore " $t = n(1-u)$ ") dans l'intégrale I_m .

Comme $t \mapsto \frac{n-t}{n}$ est de classe C^1 , bijective et strictement décroissante de $]0, n[$ sur $]0, 1[$, on a par le théorème du changement de variable pour les intégrales impropres:

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^m \ln(t) dt = - \int_0^1 u^m \ln(n(1-u)) (-n) du \\ &= +n \int_0^1 u^m (\ln n + \ln(1-u)) du \end{aligned}$$

D'une part, $\int_0^1 u^m du$ est convergente et vaut $\frac{1}{m+1}$

D'autre part, $\int_0^1 u^m \ln(1-u) du = J_m$ est convergente (Q37)

Ainsi, on peut séparer l'intégrale en deux pour obtenir:

$$\underline{I_m = \frac{n}{m+1} \ln(n) + n J_m}$$

$$Q39) \text{ Par Q37 et Q38: } I_m = \frac{n}{m+1} \left[\ln(n) - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} \right] = \frac{n}{m+1} \left[-H_m - \frac{1}{m+1} \right]$$

Or $\frac{n}{m+1} \sim \frac{n}{n} = 1$ donc par Q30 on a: $\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m = -\gamma$

D'après Q36: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$. Par unicité de la limite:

$$\underline{\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt}$$