Proposition de corrigé

—

Concours Commun Mines-Ponts

Sujet 2 Mathématiques 2025, filière PSI

Modèle SIR pour la propagation d'épidémie
et séries de Dirichlet

Si vous repérez une coquille, une erreur, ou si vous avez une question ou une suggestion, n'hésitez pas à me contacter !

https://mabroukbenjaba.github.io/

Notations

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.

— L'ensemble $C^k(J,\mathbb{R})$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbb{R}$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre k existent et telles que $f^{(k)}$ soit continue sur J.

— L'ensemble $C^\infty(J,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables sur J.

— Si $f : J \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, on note

$$\|f\|_{\infty,J} = \sup\{|f(x)|,\ x \in J\}.$$

Introduction

Dans ce sujet, on étudie l'équation différentielle non linéaire

$$(E) : \quad y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}e^{y(x)}$$

dont l'inconnue est une fonction $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. On montrera en Partie V que cette équation peut être utilisée pour caractériser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus.

On admet dans tout le sujet que le problème de Cauchy

$$(C) : \quad \begin{cases} y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}e^{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution $y \in C^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, que l'on va chercher à approcher de plusieurs manières.

Partie I : Linéarisation de (E)

Pour approcher la solution y du problème de Cauchy (C), on propose dans un premier temps de linéariser l'équation (E). Comme y est continue et vérifie $y(0) = 0$, on remarque au voisinage de 0 que

$$\exp(y(x)) \approx 1 + y(x).$$

On propose donc d'approcher y par la solution de l'équation différentielle linéaire

$$(E_\ell) : \quad u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)),$$

dont l'inconnue est une fonction $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. On introduit de même le problème de Cauchy associé

$$(C_\ell) : \quad \begin{cases} u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)) \\ u(0) = 0 \end{cases} .$$

1 ▷ Justifier qu'il existe une unique solution u au problème de Cauchy (C_ℓ), donner son expression et dresser son tableau de variation.

☞ Réponse

Le problème (C_ℓ) est un problème de Cauchy d'ordre 1 avec une équation différentielle linéaire. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire,
$\boxed{\text{ce problème admet une unique solution.}}$

Réécrivons l'équation différentielle sous la forme :

$$u'(x) + \frac{1}{2}u(x) = -\frac{1}{2}.$$

— **Solution particulière :** On remarque que $u_p(x) = -1$ est une solution.

— **Solution homogène :** La solution du problème homogène s'écrit

$$u_h(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x},$$

avec $A \in \mathbb{R}$.

Finalement, la solution générale est donnée par $u(x) = u_p(x) + u_h(x) = -1 + Ae^{-\frac{1}{2}x}$ où $A \in \mathbb{R}$ est à déterminer avec la condition initiale.
On a :

$$u(0) = 0 \iff -1 + A = 0 \iff A = 1.$$

Ainsi, l'expression de la solution u est :

$$\boxed{u(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 1.}$$

Cette fonction est décroissante, vaut $u(0) = 0$ et tend vers -1 en $+\infty$. Ceci est résumé dans le tableau suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de u'	$-$
Variations de u	$0 \searrow -1$

2 ▷ Montrer qu'il existe une unique solution constante de l'équation (E_ℓ), notée $\gamma \in \mathbb{R}$, et vérifier que la solution u trouvée en question 1 satisfait

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \gamma.$$

☞ Réponse

Soit γ une solution constante de (E_ℓ). En injectant dans l'équation, cela revient à dire que γ vérifie

$$\gamma + 1 = \frac{1}{2}(1 + \gamma),$$

soit encore

$$\gamma = -1.$$

Ainsi, $\boxed{\text{il existe une unique solution constante } \gamma \text{ de l'équation } (E_\ell) : \gamma = -1.}$
Par ailleurs, par la question précédente, on a bien :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} u(x) = -1 = \gamma.}$$

On admet à présent dans toute la suite du sujet que les propriétés observées sur u, la solution de (C_ℓ), restent vérifiées sur y, la solution de (C). En particulier, on admet que :

— y est décroissante sur $\mathbb{R}_+$,

— $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = c$, où $c \in \mathbb{R}$.

3 ▷ Montrer que c est une solution constante de (E), puis que (E) admet exactement deux solutions constantes notées c_1 et c_2 telles que $c_1 < 0 < c_2$. En déduire la valeur de c en fonction de c_1 et c_2.

☞ Réponse

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, y est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\eta_x \in]x, x+1[$ tel que :

$$(1) \qquad y(x+1) - y(x) = y'(\eta_x)(x+1-x) = y'(\eta_x) = \frac{1}{2}e^{y(\eta_x)} - (y(\eta_x)+1).$$

Comme $\eta_x > x$, on en déduit par minoration que $\lim_{x\to+\infty} \eta_x = +\infty$. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans (1), on obtient :

$$c - c = \frac{1}{2}e^c - (c+1),$$

soit encore

$$c' + c + 1 = \frac{1}{2}e^c,$$

donc $\boxed{c \text{ est une solution constante de } (E).}$

Une solution constante v de (E) vérifie donc $v + 1 = \frac{1}{2}e^v$, c'est-à-dire $f(v) = 0$ où f est définie par $f(x) = \frac{1}{2}e^x - x - 1$.
Etudions cette fonction :
On a $f'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1$ et $f'(x) = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$.
Comme f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cela signifie que f décroît sur $]-\infty, \ln 2]$, atteint un minimum négatif en $\ln 2$ (car $f(\ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2 < 0$), puis croît sur $[\ln 2, +\infty[$.
De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, f admet exactement deux zéros

$$c_1 \in]-\infty, \ln 2[\qquad \text{et} \qquad c_2 \in]\ln 2, +\infty[.$$

Comme $f(0) < 0$, cela signifie que $c_1 \in \mathbb{R}_-^*$.
Par conséquent,

$\boxed{(E) \text{ admet exactement deux solutions constantes } c_1 \text{ et } c_2 \text{ vérifiant } c_1 < 0 < c_2.}$

On sait que la solution y est décroissante et $y(0) = 0$ donc on en déduit que

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $y(x) \leq 0$. Il vient alors que sa limite c vérifie $c \leq 0$. Comme $c_2 > 0$, on obtient $\boxed{c = c_1 < 0.}$

Partie II : Séries de Dirichlet

On propose dans cette partie d'étudier des séries de fonctions particulières appelées séries de Dirichlet.

Définition 1 Une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est dite de Dirichlet si

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = a_n e^{-\lambda_n x}$$

où la suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour une valeur donnée $M \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq \frac{M}{2^n}$$

et la suite de réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et vérifie

$$\lambda_0 = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty, \quad \text{et} \quad \lambda_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit alors la quantité $b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k a_n$.

4 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les réels b_k sont bien définis.

☞ Réponse

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n)$, il existe $C > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $0 \leq \lambda_n \leq Cn$.
Pour tout $n \geq n_0$, on obtient $\lambda_n^k \leq C^k n^k$, soit encore $\lambda_n^k |a_n| \leq C^k n^k \frac{M}{2^n} = MC^k \frac{n^k}{2^n}$.
Or,

$$n^2 \frac{n^k}{2^n} = \frac{n^{k+2}}{2^n} = \frac{e^{(k+2)\ln n}}{e^{n\ln 2}} = e^{(k+2)\ln n - n\ln 2},$$

et, par croissance comparée, on a $\lim_{n\to+\infty} ((k+2)\ln n - n\ln 2) = -\infty$ donc par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{n^k}{2^n} = 0$. Autrement dit,

$$\frac{n^k}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha > 1$), on applique le critère de comparaison pour les séries à termes positifs pour obtenir que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^k}{2^n}$ converge donc, par majoration, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda_n^k a_n$ converge absolument, donc converge. On en déduit que $\boxed{b_k \text{ est bien défini.}}$

5 ▷ Montrer que toute série de Dirichlet $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. On note alors f sa somme. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

☞ Réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \geq 0$ donc pour tout $x \geq 0$, on a :

$$|f_n(x)| \leq |a_n| \leq \frac{M}{2^n}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \frac{M}{2^n}.$$

Comme la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, on obtient par comparaison que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément. Ainsi,

$$\boxed{\text{toute série de Dirichlet } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+.}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on vient de voir que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, alors sa somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

6 ▷ Exprimer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en fonction de a_0 et b_0.

☞ Réponse

Comme f est continue en 0, on a

$$f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_0 + b_0.$$

Ensuite, comme la suite de réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et vérifie $\lambda_0 = 0$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} a_0 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Comme $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, on applique le théorème de la double limite pour inverser somme et limite et obtenir :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = a_0.$$

En conclusion, f vérifient

$$\boxed{f(0) = b_0 + a_0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = a_0.}$$

7 ▷ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f \in C^k(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et donner une expression de $x \mapsto f^{(k)}(x)$. Exprimer ensuite $f^{(k)}(0)$ en fonction de b_k.

☞ Réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^k(\mathbb{R}_+)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \lambda_n^k f_n(x)$.
Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n^{(j)}(x)| \leq C^j M \frac{n^j}{2^n}$ donc pour tout $j \in [\![0, k]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n^{(j)}\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq C^j M \frac{n^j}{2^n}$. Or, on a vu à la question 4 que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^j}{2^n}$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} f_n^{(j)}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Par conséquent, $f \in C^k(\mathbb{R}_+)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \lambda_n^k f_n(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k f_n(x).$$

(La dernière égalité vient du fait que $\lambda_0 = 0$) Finalement, on obtient

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k a_n = (-1)^k b_k.$$

8 ▷ Montrer que si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☞ Réponse

Supposons $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}_n) : \text{“ Pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0. \text{ ”}$$

Montrons par récurrence que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- **<u>Initialisation :</u>** Pour $n = 0$, on utilise la question 6 : $a_0 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car f est la fonction nulle.
- **<u>Hérédité :</u>** Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
  Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
  $$0 = f(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k x} = a_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} x} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k x}.$$
  En divisant par $e^{-\lambda_{n+1} x}$, on obtient :
  $$a_{n+1} = -\sum_{k=n+2}^{+\infty} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_{n+1})x}.$$
  Or $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc pour $k \geq n+2$, $\lambda_k - \lambda_{n+1} > 0$ d'où $\lim_{x\to+\infty} a_k e^{-(\lambda_k-\lambda_{n+1})x} = 0$.
  De plus, pour tout $k \geq n+2$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\left|a_k e^{-(\lambda_k-\lambda_{n+1})x}\right| \leq |a_k|$ et $\sum_{k\geq 0} a_k$ converge absolument (voir question 5) donc $\sum_{k\geq n+2} a_k e^{-(\lambda_k-\lambda_{n+1})x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et on peut intervertir limite et somme pour trouver :
  $$\lim_{x\to+\infty} a_{n+1} = -\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=n+2}^{+\infty} a_k e^{-(\lambda_k-\lambda_{n+1})x} = -\sum_{k=n+2}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} a_k e^{-(\lambda_k-\lambda_{n+1})x} = 0.$$
  On obtient donc $a_{n+1} = 0$.

Par principe de récurrence, on a ainsi montré $\boxed{a_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Partie III : Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

Revenons au problème de Cauchy (C), et à l'étude de sa solution $y \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Supposons dorénavant que y est la somme d'une série de Dirichlet, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$$

où les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les propriétés mentionnées en Définition 1. On introduit également la fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) = e^{y(x)}$$

9 ▷ Exprimer a_0 et b_0 en fonction de la constante c introduite en Partie I.

☞ Réponse

Par hypothèse, y vérifie

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = c, \end{cases}$$

et d'après la question 6,

$$\begin{cases} y(0) = b_0 + a_0 \\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = a_0. \end{cases}$$

Par conséquent, on en déduit

$$\boxed{a_0 = c \text{ et } b_0 = -c.}$$

10 ▷ En utilisant l'équation (E) satisfaite par y, calculer b_1.

☞ Réponse

En appliquant l'équation (E) en 0, on trouve :

$$y'(0) + y(0) + 1 = \frac{1}{2} e^{y(0)}.$$

On sait que $y(0) = 0$ et, d'après la question 7, $y'(0) = -b_1$ d'où :

$$-b_1 + 0 + 1 = \frac{1}{2},$$

ou encore $\boxed{b_1 = \frac{1}{2}.}$

11 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k$$

où les coefficients d_k sont définis par

$$d_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \quad d_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i$$

☞ Réponse

On a $g = \exp \circ y$. Comme $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $y \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, on obtient par composition $g \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $(\mathcal{Q}_k)$ la propriété suivante :

$$(\mathcal{Q}_k) : \text{“ Pour tout } m \in [\![0, k]\!],\ g^{(m)}(0) = (-1)^m d_m. \text{ ”}$$

Montrons par récurrence que $(\mathcal{Q}_k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- **<u>Initialisation :</u>** Pour $k = 0$, on a par définition de d_0 : $g(0) = e^0 = 1 = d_0$.
- **<u>Hérédité :</u>** Supposons qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $(\mathcal{P}_{k-1})$ est vraie. Montrons que $(\mathcal{P}_k)$ est vraie.
  On a $g' = y'g$. Par la formule de Leibniz, on obtient :
  $$g^{(k)} = (g')^{(k-1)} = (y'g)^{(k-1)} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} y^{(i+1)} g^{(k-1-i)}.$$
  En effectuant un changement de variable dans la somme (décalage d'une unité), on trouve :
  $$g^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} y^{(i)} g^{(k-i)}.$$
  Évaluons cette égalité en 0 : Pour $i \in [\![1, k]\!]$, $k - i \in [\![0, k-1]\!]$ donc par hypothèse de récurrence, $g^{(k-i)}(0) = (-1)^{k-i} d_{k-i}$. De plus, d'après la question 7, on a $y^{(i)}(0) = (-1)^i b_i$. On obtient alors :
  $$\begin{aligned} g^{(k)}(0) &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} y^{(i)}(0) g^{(k-i)}(0) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (-1)^i b_i (-1)^{k-i} d_{k-i} \\ &= (-1)^k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} b_i d_{k-i} \\ &= (-1)^k d_k. \end{aligned}$$

Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k.}$

12 ▷ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'équation (E) satisfaite par y, exhiber une relation de récurrence liant b_{k+1}, b_k et d_k.

☞ Réponse

On dérive k fois l'équation (E) et on trouve :

$$y^{(k+1)}(x) + y^{(k)}(x) = \frac{1}{2} g^{(k)}(x),$$

puis en évaluant en 0 :

$$\boxed{b_{k+1} + b_k = \tfrac{1}{2} d_k.}$$

Partie IV : Approximation de la solution y

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour approcher la solution y de (C), on propose dans cette partie de tronquer toutes les sommes en s'arrêtant au terme de rang N. Les résultats de la Partie III permettent d'obtenir une approximation des quantités β_k définies pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\beta_k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^k a_n.$$

On introduit également la fonction tronquée $y_N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\lambda_n x}.$$

En se donnant les valeurs de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$,on veut dans cette partie calculer les valeurs des coefficients a_n pour n de 1 à N.On utilisera les notations

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad et \quad B = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

13 ▷ Montrer que

$$\|y_N - y\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \frac{M}{2^N},$$

et déduire que y_N converge uniformément vers y sur $\mathbb{R}_+$. Proposer ensuite un intervalle $J \subset \mathbb{R}_+$ où la majoration de $\|y_N - y\|_{\infty,J}$ serait plus fine.

☞ Réponse

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a pour tout $n \geq N+1$ $e^{-\lambda_n x} \leq 1$ car $\lambda_n > 0$ et $x > 0$ donc par inégalité triangulaire

$$|y_N(x) - y(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{2^n}.$$

Or,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{2^{n+N+1}} = \frac{M}{2^{N+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{M}{2^{N+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{M}{2^N}.$$

En passant au sup, on obtient bien la majoration

$$\boxed{\|y_N - y\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \tfrac{M}{2^N}.}$$

Comme $\lim_{N\to+\infty} \frac{M}{2^N} = 0$, on a par encadrement $\lim_{N\to+\infty} \|y_N - y\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = 0$, cela signifie par définition que $\boxed{y_N \text{ converge uniformément vers } y \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

On pourrait affiner un peu dans la majoration "$e^{-\lambda_n x} \leq 1$".
Fixons $\gamma > 0$ et prenons $J := [\gamma, +\infty[$. Pour tout $n \geq N+1$ $\lambda_n \geq \lambda_{N+1} > 0$, donc

pour tout $x \in J$, $e^{-\lambda_n x} \leq e^{-\lambda_{N+1}\gamma}$. Ainsi, on obtient la majoration suivante :

$$|y_N(x) - y(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| e^{-\lambda_{N+1}\gamma} \leq \frac{M}{2^N} e^{-\lambda_{N+1}\gamma}.$$

puis en passant au sup on obtient une majoration plus fine :

$$\boxed{\|y_N - y\|_{\infty,J} \leq \tfrac{M}{2^N} e^{-\lambda_{N+1}\gamma}.}$$

14 ▷ Montrer que $VA = B$ où $V \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice que l'on explicitera.

☞ Réponse

Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ on a :

$$\beta_k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^k a_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \lambda_2^k & \cdots & \lambda_N^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \lambda_2^k & \cdots & \lambda_N^k \end{pmatrix} A.$$

On obtient alors :

$$B = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \cdots & \lambda_N^0 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_N^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix} A = VA,$$

avec

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \cdots & \lambda_N^0 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_N^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}).$$

15 ▷ Prouver que le système $VA = B$ admet une unique solution $A \in \mathbb{R}^N$.

☞ Réponse

Remarquons que la matrice V est la transposée d'une matrice de Vandermonde de paramètres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ dont le déterminant est donné par $\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_j - \lambda_i)$.

Comme le déterminant est invariant par transposition, on obtient :

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Or pour tout (i, j) tel que $i < j$, $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ car $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et donc $\det(V) \neq 0$ d'où V est inversible.

On en déduit $\boxed{\text{qu'il existe une unique solution du système, donnée par } A = V^{-1}B.}$

Partie V : Modèle de propagation d'épidémie SIR

Pour modéliser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus,on peut utiliser le modèle de propagation d'épidémie appelé SIR.Dans ce modèle,la population est séparée en trois groupes :

— Le groupe des personnes susceptibles, n'ayant pas attrapé la maladie, est noté S et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $S \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

— Le groupe des personnes infectées par la maladie est noté I et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $I \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

— Le groupe des personnes ayant contracté la maladie puis récupéré est noté R. On suppose qu'un individu ne peut attraper la maladie qu'une seule fois dans sa vie. Une fois dans le groupe des individus récupérés, il y reste définitivement et ne redevient jamais susceptible. La proportion du groupe R au cours du temps est représentée par la fonction $R \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

On a ainsi la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad S(x) + I(x) + R(x) = 1.$$

Dans un modèle de propagation d'épidémie SIR, ces trois fonctions sont de plus des solutions d'un problème de Cauchy associé à un système d'équations différentielles non linéaires

$$(F) : \begin{cases} S'(x) = -I(x)S(x) \\ I'(x) = I(x)S(x) - I(x) \\ R'(x) = I(x) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \end{cases}$$

où $S_0, I_0, R_0 \in [0, 1]$ sont les conditions initiales. On admet dans la suite le résultat suivant :

Théorème 1 Pour (S_0, I_0, R_0) fixés, le problème de Cauchy (F) admet une unique solution $(S, I, R) \in (C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))^3$. De plus, si (S, I, R) et $(\widetilde{S}, \widetilde{I}, \widetilde{R})$ sont les solutions associées aux conditions initiales (S_0, I_0, R_0) et $(\widetilde{S}_0, \widetilde{I}_0, \widetilde{R}_0)$, alors

$$(S_0, I_0, R_0) \neq (\widetilde{S}_0, \widetilde{I}_0, \widetilde{R}_0) \implies \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (S(x), I(x), R(x)) \neq \left(\widetilde{S}(x), \widetilde{I}(x), \widetilde{R}(x)\right).$$

16 ▷ Supposons que $S_0 = 0$. Donner l'expression du triplet solution (S, I, R) du système (F).

☞ **Réponse**

- La fonction $S(x) = 0$ vérifie la première équation ainsi que la condition initiale.
- La fonction I doit satisfaire $I'(x) = -I(x)$ et $I(0) = I_0$ d'où $I(x) = I_0 e^{-x}$.
- La fonction R doit satisfaire $R' = I$ et $R(0) = R_0$ donc en intégrant l'équation sur $[0, x]$, on a :

$$R(x) - R(0) = \int_0^x I(t)dt = \int_0^x I_0 e^{-x} dt = I_0(1 - e^{-x}),$$

d'où $R(x) = R_0 + I_0(1 - e^{-x})$.

$\boxed{\text{Le triplet } (S,I,R)(x) = (0, I_0e^{-x}, R_0 + I_0(1-e^{-x})) \text{ satisfait le problème de Cauchy}}$
(F) (et d'après le théorème 1, c'est l'unique solution.)

17 ▷ Montrer que si $S_0 > 0$ alors la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) ne s'annule jamais, et en déduire que S est strictement positive.

☞ Réponse

Soit $S_0 > 0$.
Supposons qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $S(x_0) = 0$. Posons

$$\left(\widetilde{S}, \widetilde{I}, \widetilde{R}\right)(x) := \left(0,\ I(x_0)e^{-(x-x_0)},\ R_0 + I(x_0)\left(1 - e^{-(x-x_0)}\right)\right).$$

Le calcul analogue de la question précédente montre que $\left(\widetilde{S}, \widetilde{I}, \widetilde{R}\right)$ vérifie (F) avec comme condition initiale $(0,\ I(x_0)e^{x_0},\ R_0 + I(x_0)\left(1 - e^{x_0}\right))$.
Comme $\left(\widetilde{S}(x_0), \widetilde{I}(x_0), \widetilde{R}(x_0)\right) = (0, I(x_0), R(x_0)) = (S(x_0), I(x_0), R(x_0))$, la contraposée du théorème 1 permet d'obtenir :

$$\left(\widetilde{S}(0), \widetilde{I}(0), \widetilde{R}(0)\right) = (S(0), I(0), R(0)) = (S_0, I_0, R_0).$$

En particulier, la première composante nous donne $S_0 = 0$, ce qui est impossible.
Par conséquent, $\boxed{\text{la fonction } S \text{ du triplet solution } (S,I,R) \text{ de } (F) \text{ ne s'annule jamais.}}$

Comme $S(0) = S_0 > 0$, par continuité, S sera strictement positive dans un voisinage de 0. On vient de voir qu'elle ne s'annule pas. S'il existe $x_1 > 0$ où $S(x_1) < 0$, alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in]0, x_1[$ tel que $S(x_0) = 0$, ce qui est impossible. On en déduit que $\boxed{S \text{ est strictement positive.}}$

18 ▷ Supposons que $S_0 > 0$. Montrer que la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) vérifie la relation

$$\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}.$$

☞ Réponse

En supposant $S_0 > 0$, la question précédente montre que $S(x) > 0$ pour tout $x > 0$
On peut donc diviser par $S(x)$ dans la première équation de (F) pour obtenir

$$I(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)}.$$

En injectant cette expression dans la deuxième équation de (F), on obtient la relation demandée :

$$\boxed{\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}.}$$

On se place à partir de maintenant dans le cas où $S_0 = \frac{1}{2}, I_0 = \frac{1}{2}$ et $R_0 = 0$. On introduit de plus la fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad h(x) = \ln\left(\frac{S(x)}{S_0}\right) = \ln(2S(x)).$$

19 ▷ Montrer que h est solution du problème de Cauchy (C).

☞ Réponse

Tout d'abord, on remarque qu'on est dans le cas $S_0 > 0$, donc $S(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et la fonction h est bien définie. De plus, $h(0) = 0$.

Ensuite, h est dérivable et on a : $h'(x) = \frac{2\,S'(x)}{2\,S(x)}$. D'après la première équation de (F), $h'(x) = -I(x)$. En utilisant la troisième équation de (F), $h'(x) = -R'(x)$ donc on a $(h+R)'(x) = 0$ d'où $(h+R)(x) = (h+R)(0)$. Comme $h(0) = 0$ et $R(0) = 0$, on obtient $h(x) = -R(x)$. De plus, par définition de h on a $S(x) = S_0 e^{h(x)} = \frac{1}{2}e^{h(x)}$. Ainsi, en exploitant la relation reliant S, I et R, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S(x) + I(x) + R(x) = 1 &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{2}e^{h(x)} - h'(x) - h(x) = 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) + h(x) + 1 = \frac{1}{2}e^{h(x)}.\end{aligned}$$

On a donc montré que $\boxed{h \text{ est solution du problème de Cauchy } (C).}$

Pour approcher la fonction S, on introduit la fonction $S_N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad S_N(x) = S_0 e^{y_N(x)} = \frac{1}{2}\exp\left(\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\lambda_n x}\right).$$

20 ▷ Montrer que S_N converge uniformément vers S sur $\mathbb{R}_+$ quand $N \to +\infty$ et que

$$\|S_N - S\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \frac{Me^{2M}}{2^{N+1}}.$$

☞ Réponse

D'après la question précédente, h est solution de (C) et (C) admet une unique solution y donc $h = y$ et on a vu ci-dessus qu'on a $S(x) = S_0 e^{y(x)}$.
Soit $x \geq 0$ fixé. On a :

$$|S_N(x) - S(x)| = S_0|e^{y_N(x)} - e^{y(x)}|.$$

On applique le théorème des accroissements finis à la fonction exp entre $\min(y_N(x), y(x))$ et $\max(y_N(x), y(x))$:
Il existe $\eta_x \in]\min(y_N(x), y(x)), \max(y_N(x), y(x))[$ tel que

$$|e^{y_N(x)} - e^{y(x)}| \leq e^{\xi_x}|y_N(x) - y(x)|.$$

En utilisant la majoration des a_n, on a : Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \geq 0$,

$$|y_N(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = 2M.$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient : pour tout $x \geq 0$,

$$|y(x)| \leq 2M.$$

Par conséquent,

$$|\eta_x| \leq \max\left(|y_N(x)|, |y(x)|\right) \leq 2M.$$

Il vient alors, en utilisant la croissance de la fonction exp et également la question 13 :

$$|e^{y_N(x)} - e^{y(x)}| \leq e^{2M} \frac{M}{2^N}.$$

Finalement, pour tout $x \geq 0$,

$$|S_N(x) - S(x)| \leq S_0 e^{2M} \frac{M}{2^N} = e^{2M} \frac{M}{2^{N+1}}.$$

La majoration étant indépendante de x, on a donc bien établi :

$$\boxed{\|S_N - S\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \frac{Me^{2M}}{2^{N+1}}.}$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{Me^{2M}}{2^{N+1}} = 0$, on en déduit par majoration que $\boxed{S_N \text{ converge uniformément vers } S \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

Partie VI : Modèle probabiliste

Toutes les variables aléatoires que l'on sera amené à considérer dans la suite sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On rappelle que $\binom{a}{b}$ est nul si $b > a$.

Pour toute suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 0}$, on note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta U_n = U_{n+1} - U_n.$$

Dans tout ce qui suit, on considère une population $\mathcal{P}$ de $M \geq 1$ individus, et l'on fixe $K \in \{0, \ldots, M\}$. On note

$$E = \{(s, i, r) \in \mathbb{N}^3, \quad s + i + r = M\}.$$

On considère maintenant un autre modèle de propagation de la même épidémie non létale pendant plusieurs jours au sein de la population $\mathcal{P}$.

Chaque matin, la population se répartit en trois classes distinctes : les personnes susceptibles (jamais infectées), les personnes infectées, et les personnes rétablies (et désormais immunisées). On note $\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n$ et $\widetilde{R}_n$ les effectifs des trois classes au matin du n-ième jour et l'on convient que

$$\widetilde{S}_0 > 0, \quad \widetilde{I}_0 \geq 1,$$

de sorte que l'on ne soit pas dans un cas trivial où l'épidémie est finie ou ne peut pas commencer.

Lorsqu'au matin du n-ième jour, $(\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s, i, r) \in E$, l'évolution quotidienne est la suivante :

— dans la journée, chacune des s personnes saines rencontre, indépendamment des autres, K personnes au hasard parmi les M personnes de la population totale. Dès que l'une au moins des rencontres se fait avec une personne infectée, la personne saine en question devient infectée le lendemain matin ;

— dans le même temps, chaque personne infectée peut guérir à la fin de la journée avec une probabilité ρ fixée dans $]0,1[$.

21 ▷ Soit $(s,i,r) \in E$. Conditionnellement à l'événement $((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r))$, quelle est la probabilité, notée $p(i)$, pour une personne susceptible d'être infectée lors de cette journée ?

☞ Réponse

Une personne susceptible ne serait pas infectée dans le cas où la rencontre avec les K personnes parmi les M de la population totale [Nombre de possibilités totales : $\binom{M}{K}$] s'est effectué avec des personnes non infectées (il y a $M-i$ personnes saines, donc cela fait K personnes parmi $M-i$ personnes) [Nombre de possibilités concernées par la situation : $\binom{M-i}{K}$].
Par conséquent, la probabilité de ne pas être infecté vaut :

$$1 - p(i) = \frac{\binom{M-i}{K}}{\binom{M}{K}}.$$

Il vient alors :

$$\boxed{p(i) = 1 - \frac{\binom{M-i}{K}}{\binom{M}{K}}.}$$

22 ▷ Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,\dots,M\}$. Montrer que :

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{(s,i,r)\in E} \left(\sum_{k=0}^{M} k\mathbb{P}(Z=k \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)) \right) \mathbb{P}((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r))$$

☞ Réponse

Comme Z une variable aléatoire, on a par définition :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{M} k\mathbb{P}(Z=k).$$

Comme le vecteur aléatoire $(\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n)$ est à valeurs dans E, le système d'événements $((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r))_{(s,i,r)\in E}$ forme un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales, on obtient : Pour tout $k \in [\![0,M]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{(s,i,r)\in E} \mathbb{P}\left(Z=k,\ (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)\right) \\ &= \sum_{(s,i,r)\in E} \mathbb{P}\left(Z=k \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)\right) \mathbb{P}\left((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)\right).\end{aligned}$$

En injectant ce résultat dans l'expression de $\mathbb{E}(Z)$ ci-dessus et en inversant l'ordre de sommation (licite car on a une somme finie), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{M} k \left(\sum_{(s,i,r)\in E} \mathbb{P}\left(Z = k \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)\right) \mathbb{P}\left((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)\right)\right) \\ &= \sum_{(s,i,r)\in E} \sum_{k=0}^{M} \left(k\mathbb{P}\left(Z = k \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)\right) \mathbb{P}\left((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)\right)\right) \\ &= \sum_{(s,i,r)\in E} \left(\sum_{k=0}^{M} k\mathbb{P}\left(Z = k \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)\right)\right) \mathbb{P}\left((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)\right).\end{aligned}$$

23 ▷ Justifier que pour tout $n \geq 0$, les variables aléatoires $\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n$ ainsi que les variables aléatoires $\Delta\widetilde{S}_n, \Delta\widetilde{I}_n, \Delta\widetilde{R}_n$ ont une espérance finie.

☞ Réponse

Pour tout n, $\widetilde{S}_n$, $\widetilde{I}_n$ et $\widetilde{R}_n$ sont à valeurs dans un ensemble fini donc leur espérance sur cet ensemble est une somme finie donc leur espérance est finie.
Par linéarité de l'espérance (soustraction de deux termes finis), il en est de même pour $\Delta\widetilde{S}_n, \Delta\widetilde{I}_n, \Delta\widetilde{R}_n$.
On en déduit :

$\boxed{\text{Les variables aléatoires } \widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n \text{ ainsi que } \Delta\widetilde{S}_n, \Delta\widetilde{I}_n, \Delta\widetilde{R}_n \text{ ont une espérance finie.}}$

24 ▷ Établir l'identité suivante :

$$\mathbb{E}[\Delta\widetilde{R}_n] = \rho\mathbb{E}[\widetilde{I}_n]$$

☞ Réponse

Le nombre de personnes rétablies et désormais immunisées ne pouvant que croître d'un jour à l'autre, on a : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta\widetilde{R}_n = \widetilde{R}_{n+1} - \widetilde{R}_n \geq 0$. (Et aussi la variation ne peut pas dépasser le nombre totale M de la population, d'où $\Delta\widetilde{R}_n \leq M$).
Ainsi, $\Delta\widetilde{R}_n$ est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, M]\!]$. On peut appliquer la question 22 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta\widetilde{R}_n] &= \sum_{(s,i,r)\in E} \left(\sum_{k=0}^{M} k\mathbb{P}(\Delta\widetilde{R}_n = k \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r))\right) \mathbb{P}((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)) \\ &= \sum_{(s,i,r)\in E} \left(\mathbb{E}[\Delta\widetilde{R}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)]\right) \mathbb{P}((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)).\end{aligned}$$

On s'intéresse à la variable aléatoire $\Delta\widetilde{R}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)$:
Comme $\widetilde{I}_n = i$, il y a i personnes infectées et il ne peut pas y avoir plus de personnes rétablies donc $\Delta\widetilde{R}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)$ à valeurs dans $[\![0, i]\!]$.
On sait que, conditionnellement à l'évènement $(\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)$, chaque personne infectée peut guérir à la fin de la journée avec une probabilité $\rho \in]0, 1[$.
On a donc un schéma de Bernoulli (guérir ou non) qui se répète i fois (nombre de

personnes infectées), de manière indépendante (la guérison entre les individus est indépendante), dont le succès (être guéri) est de probabilité ρ.
Ainsi, $\Delta\widetilde{R}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)$ suit une loi binomiale de paramètres (i,ρ). En particulier, $\mathbb{E}[\Delta\widetilde{R}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)] = i\rho$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta\widetilde{R}_n] &= \sum_{(s,i,r)\in E} \Big(\mathbb{E}[\Delta\widetilde{R}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)]\Big)\,\mathbb{P}((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)) \\ &= \rho \sum_{(s,i,r)\in E} i\,\mathbb{P}((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)).\end{aligned}$$

Considérons la fonction $f : (x,y,z) \mapsto y$. On a :

$$\mathbb{E}[\Delta\widetilde{R}_n] = \rho \sum_{(s,i,r)\in E} f(s,i,r)\,\mathbb{P}((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)).$$

On peut appliquer la formule de transfert pour obtenir :

$$\mathbb{E}[\Delta\widetilde{R}_n] = \rho\mathbb{E}[f(\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n)].$$

D'où :

$$\boxed{\mathbb{E}[\Delta\widetilde{R}_n] = \rho\mathbb{E}[\widetilde{I}_n].}$$

25 ▷ Établir l'identité suivante : pour $(s,i,r) \in E$, pour tout $k \in \{0, \cdots, s\}$,

$$\mathbb{P}(\Delta\widetilde{S}_n = -k \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)) = \binom{s}{k}(p(i))^k(1-p(i))^{s-k}$$

☞ Réponse

Le nombre de personnes susceptibles (jamais infectées) ne pouvant que décroître d'un jour à l'autre, on a : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta\widetilde{S}_n = \widetilde{S}_{n+1} - \widetilde{S}_n \leq 0$. De plus, $\widetilde{S}_{n+1} \geq 0$ donc $\Delta\widetilde{S}_n \geq -\widetilde{S}_n \geq -M$. Ainsi, $-\Delta\widetilde{S}_n$ est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, M]\!]$.

On s'intéresse à la variable aléatoire $-\Delta\widetilde{S}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)$:
Comme $\widetilde{S}_n = s$, on a vu précédemment $\Delta\widetilde{S}_n \geq -\widetilde{S}_n = -s$ donc $-\Delta\widetilde{S}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)$ est à valeurs dans $[\![0, s]\!]$.
On sait que, conditionnellement à l'évènement $(\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)$, chaque personne susceptible peut être infectée lors de la journée avec une probabilité $p(i)$ (voir la question 21).
On a donc un schéma de Bernoulli (être infecté ou non) qui se répète s fois (nombre de personnes saines), de manière indépendante (l'infection entre les individus est indépendante), dont le succès (être infecté) est de probabilité $p(i)$.
Ainsi, $-\Delta\widetilde{S}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)$ suit une loi binomiale de paramètres $(s, p(i))$.
Finalement, pour tout $k \in [\![0, s]\!]$, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(\Delta\widetilde{S}_n = -k \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)) = \binom{s}{k}(p(i))^k(1-p(i))^{s-k}.}$$

26 ▷ Montrer que
$$\mathbb{E}[\Delta\widetilde{S}_n] = -\mathbb{E}[\widetilde{S}_n p(\widetilde{I}_n)]$$
puis en déduire l'équation satisfaite par $\mathbb{E}[\Delta\widetilde{I}_n]$.

☞ Réponse

On a vu à la question précédente que $-\Delta\widetilde{S}_n$ est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, M]\!]$. On peut appliquer la question 22 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[-\Delta\widetilde{S}_n] &= \sum_{(s,i,r)\in E}\left(\sum_{k=0}^{M} k\mathbb{P}(-\Delta\widetilde{S}_n = k \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r))\right)\mathbb{P}((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)) \\ &= \sum_{(s,i,r)\in E}\left(\mathbb{E}[-\Delta\widetilde{S}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)]\right)\mathbb{P}((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)).\end{aligned}$$

La question précédente montre également que $-\Delta\widetilde{S}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)$ suit une loi binomiale de paramètres $(s, p(i))$ donc, en particulier, on a
$$\mathbb{E}(-\Delta\widetilde{S}_n \mid (\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)) = sp(i).$$
Il vient :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[-\Delta\widetilde{S}_n] &= \sum_{(s,i,r)\in E} sp(i)\mathbb{P}((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)) \\ &= \sum_{(s,i,r)\in E} g(s,i,r)\mathbb{P}((\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n) = (s,i,r)),\end{aligned}$$
où $g : (x,y,z) \mapsto xp(y)$. On peut appliquer la formule de transfert pour obtenir :
$$\mathbb{E}[-\Delta\widetilde{S}_n] = \mathbb{E}[g(\widetilde{S}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{R}_n)] = \mathbb{E}[\widetilde{S}_n p(\widetilde{I}_n)].$$
Par linéarité de l'espérance, on trouve :
$$\boxed{\mathbb{E}[\Delta\widetilde{S}_n] = -\mathbb{E}[\widetilde{S}_n p(\widetilde{I}_n)].}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases}\widetilde{S}_n + \widetilde{I}_n + \widetilde{R}_n = M \\ \widetilde{S}_{n+1} + \widetilde{I}_{n+1} + \widetilde{R}_{n+1} = M,\end{cases}$$
d'où :
$$\Delta\widetilde{S}_n + \Delta\widetilde{I}_n + \Delta\widetilde{R}_n = 0.$$
Par linéarité de l'espérance, on a :
$$\mathbb{E}[\Delta\widetilde{S}_n] + \mathbb{E}[\Delta\widetilde{I}_n] + \mathbb{E}[\Delta\widetilde{R}_n] = 0.$$
Avec la première partie de la question et la question 24, on obtient :
$$-\mathbb{E}[\widetilde{S}_n p(\widetilde{I}_n)] + \mathbb{E}[\Delta\widetilde{I}_n] + \rho\mathbb{E}[\widetilde{I}_n] = 0.$$
En conclusion :
$$\boxed{\mathbb{E}[\Delta\widetilde{I}_n] = \mathbb{E}[\widetilde{S}_n p(\widetilde{I}_n)] - \rho\mathbb{E}[\widetilde{I}_n].}$$

FIN DU PROBLÈME.