

Proposition de corrigé

—

Concours Commun

Mines-Ponts

Sujet 2 Mathématiques 2025, filière PC
Étude des séries congruo-harmoniques alternées

Si vous repérez une coquille, une erreur, ou si vous avez une question ou une suggestion,
n'hésitez pas à me contacter !

L'objectif de ce problème est d'étudier une famille de séries particulières. Quelques premiers résultats sont établis dans les préliminaires. La partie 1 propose d'établir une expression des séries congruo-harmoniques alternées sous la forme d'une intégrale. La partie 2 propose de calculer la valeur de la somme de la série dans certains cas particuliers. La partie 3 s'intéresse à des calculs de probabilités relatifs aux choix des paramètres de la série. Enfin, la partie 4 se propose d'étudier la vitesse de convergence de ces séries.

Notations

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels. $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Si $z \in \mathbb{C}$, on notera $\bar{z}$ le conjugué de z .
- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a < b$, on pose $\llbracket a, b \rrbracket := [a, b] \cap \mathbb{N}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .
- Pour tout couple $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on dit que p divise q et on note $p \mid q$, s'il existe un entier k tel que $q = kp$.

Définition 1. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle série congruo-harmonique de paramètres p et q , la série de terme général u_k défini pour tout $k \geq 0$ par

$$u_k := u_{p,q;k} = \frac{(-1)^k}{pk + q},$$

et l'on note, sous réserve de convergence, $S_{p,q}$ la somme de cette série.

Nous ferons référence aux sommes partielles de cette série par la fonction

$$\phi_{p,q} : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{pk + q} \end{cases}$$

Préliminaires

1 ▷ Justifier que, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, la série $\sum u_k$ converge.

Réponse

Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $pk + q > 0$ et on pose

$$a_k := \frac{1}{pk + q},$$

de sorte que :

$$u_k = (-1)^k a_k.$$

Tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a_k > 0$.

De plus,

$$a_{k+1} = \frac{1}{p(k+1) + q} < \frac{1}{pk + q} = a_k,$$

donc la suite (a_k) est décroissante.

Enfin,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{pk + q} = 0.$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{pk + q}$ converge.

2 ▷ Dans cette question, on pose $p = q = 1$. Montrer que

$$\phi_{1,1}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

Réponse

On prend $p = q = 1$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\phi_{1,1}(n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, $1+t > 0$ donc les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $t \mapsto \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}$ sont continues sur le compact $[0, 1]$ et donc intégrables. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} dt.$$

Soit $t \in [0, 1]$. Comme $t \neq -1$, la somme géométrique finie nous donne

$$\sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)}.$$

En intégrant sur $[0, 1]$ puis par linéarité de l'intégrale (somme finie), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \phi_{1,1}(n). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\phi_{1,1}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

3 ▷ En déduire la valeur de $S_{1,1}$.

Réponse

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\phi_{1,1}(n) &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt \\ &= [\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.\end{aligned}$$

De plus, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt \right| &\leq \int_0^1 \left| \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \right| dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \\ &\leq \int_0^1 t^{n+1} dt \\ &= \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.\end{aligned}$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{S_{1,1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{1,1}(n) = \ln 2.}$$

4 ▷ Montrer alors que, pour tout $q \geq 2$,

$$S_{1,q} = (-1)^q (\phi_{1,1}(q-2) - \ln 2).$$

Réponse

Soit $q \geq 2$. Par définition,

$$S_{1,q} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+q}.$$

On effectue le changement d'indice $j = k + q - 1$ dans la somme, d'où

$$S_{1,q} = \sum_{j=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-q+1}}{j+1} = -(-1)^q \sum_{j=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1}.$$

On écrit alors

$$\sum_{j=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} - \sum_{j=0}^{q-2} \frac{(-1)^j}{j+1}.$$

Or on remarque que :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} = S_{1,1} = \ln 2 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{q-2} \frac{(-1)^j}{j+1} = \phi_{1,1}(q-2).$$

Ainsi,

$$S_{1,q} = -(-1)^q (\ln 2 - \phi_{1,1}(q-2)) = (-1)^q (\phi_{1,1}(q-2) - \ln 2).$$

1 Expression de $S_{p,q}$ sous la forme d'une intégrale

Dans cette partie, on fixe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et on pose $\alpha_{p,q} := \frac{p}{q}$. On définit alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $I_{p,q} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$I_{p,q}(t) := \int_0^1 \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx.$$

5 ▷ Démontrer que l'application $I_{p,q}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Réponse

On fixe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et on rappelle que

$$\alpha_{p,q} = \frac{p}{q} > 0.$$

Pour étudier l'intégrale à paramètre $I_{p,q}$, introduisons la fonction

$$f : \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(t, x) = \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}}.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$I_{p,q}(t) = \int_0^1 f(t, x) dx.$$

Montrons que les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre sont vérifiées.

Continuité par morceaux par rapport à la variable d'intégration : Tout d'abord, soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé. Comme

$$(t+1)\alpha_{p,q} > 0,$$

la fonction

$$x \longmapsto x^{(t+1)\alpha_{p,q}}$$

est continue sur $[0, 1]$. De plus, la fonction

$$x \longmapsto 1 + x^{\alpha_{p,q}}$$

est continue sur $[0, 1]$ et ne s'annule pas puisque

$$1 + x^{\alpha_{p,q}} \geq 1 > 0.$$

Par conséquent, la fonction

$$x \longmapsto f(t, x)$$

est continue sur $[0, 1]$, donc intégrable sur ce segment. Ainsi, $I_{p,q}(t)$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: l'application $I_{p,q}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

Continuité par rapport au paramètre : Ensuite, fixons $x \in]0, 1]$. On peut écrire

$$x^{(t+1)\alpha_{p,q}} = \exp((t+1)\alpha_{p,q} \ln x).$$

La fonction

$$t \longmapsto x^{(t+1)\alpha_{p,q}}$$

est donc continue sur $\mathbb{R}_+$, et par conséquent

$$t \longmapsto f(t, x)$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x = 0$, puisque $(t+1)\alpha_{p,q} > 0$, on a

$$f(t, 0) = 0,$$

donc $t \mapsto f(t, 0)$ est également continue.

Domination (indépendante du paramètre) : Enfin, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$, on a

$$0 \leq x^{(t+1)\alpha_{p,q}} \leq 1,$$

et donc

$$|f(t, x)| = \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} \leq \frac{1}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} \leq 1.$$

Ainsi,

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1], \quad |f(t, x)| \leq 1,$$

où la fonction constante $x \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, 1]$ et indépendante du paramètre t .

Toutes les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre sont donc satisfaites. On en déduit

l'application $I_{p,q}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

6 ▷ Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{p,q}(n) = 0.$$

Réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{p,q}(n) = \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx,$$

avec

$$\alpha_{p,q} = \frac{p}{q} > 0.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$1 + x^{\alpha_{p,q}} \geq 1,$$

donc

$$0 \leq \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} \leq x^{(n+1)\alpha_{p,q}}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[0, 1]$, on obtient

$$0 \leq I_{p,q}(n) \leq \int_0^1 x^{(n+1)\alpha_{p,q}} dx.$$

Or, puisque $(n+1)\alpha_{p,q} > -1$,

$$\int_0^1 x^{(n+1)\alpha_{p,q}} dx = \left[\frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}+1}}{(n+1)\alpha_{p,q}+1} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)\alpha_{p,q}+1}.$$

Comme $\alpha_{p,q} > 0$, on a

$$\frac{1}{(n+1)\alpha_{p,q}+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{p,q}(n) = 0.$$

Remarque : On aurait pu démontrer cette limite autrement en utilisant le théorème de convergence dominée.

7 ▷ Pour tout $x \in [0, 1]$, calculer

$$\sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k$$

puis en déduire que

$$\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx + (-1)^n I_{p,q}(n) \right).$$

Réponse

Soit $x \in [0, 1]$. Comme

$$1 + x^{\alpha_{p,q}} > 0,$$

on a $-x^{\alpha_{p,q}} \neq 1$. On peut donc utiliser la formule de la somme géométrique finie :

$$\sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k = \frac{1 - (-x^{\alpha_{p,q}})^{n+1}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}}.$$

Or,

$$(-x^{\alpha_{p,q}})^{n+1} = (-1)^{n+1} x^{(n+1)\alpha_{p,q}},$$

donc

$$\sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k = \frac{1 + (-1)^n x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}}.$$

Intégrons maintenant cette égalité sur $[0, 1]$. Comme la somme est finie, on peut utiliser la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{k\alpha_{p,q}} dx.$$

Comme $k\alpha_{p,q} \geq 0$, on obtient

$$\int_0^1 x^{k\alpha_{p,q}} dx = \frac{1}{k\alpha_{p,q} + 1}.$$

Or

$$\alpha_{p,q} = \frac{p}{q},$$

donc

$$k\alpha_{p,q} + 1 = \frac{pk + q}{q},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{k\alpha_{p,q} + 1} = \frac{q}{pk + q}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k dx &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{q}{pk + q} \\ &= q \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{pk + q} \\ &= q\phi_{p,q}(n). \end{aligned}$$

D'autre part, à l'aide de l'expression obtenue pour la somme géométrique,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k dx &= \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx. \end{aligned}$$

Par définition de $I_{p,q}$,

$$\int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx = I_{p,q}(n).$$

On obtient donc

$$q\phi_{p,q}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx + (-1)^n I_{p,q}(n).$$

Finalement,

$$\boxed{\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx + (-1)^n I_{p,q}(n) \right)}.$$

8 ▷ Montrer alors que, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$S_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1 + t^p} dt.$$

Réponse

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx + (-1)^n I_{p,q}(n) \right).$$

Or, d'après la question 6,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{p,q}(n) = 0.$$

Comme

$$|(-1)^n I_{p,q}(n)| = |I_{p,q}(n)|,$$

on en déduit également que

$$(-1)^n I_{p,q}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus, par définition de $S_{p,q}$,

$$S_{p,q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{p,q}(n).$$

En passant à la limite dans l'égalité obtenue à la question précédente, il vient donc

$$S_{p,q} = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx.$$

Rappelons maintenant que

$$\alpha_{p,q} = \frac{p}{q}.$$

Ainsi,

$$S_{p,q} = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{1}{1+x^{p/q}} dx.$$

Effectuons le changement de variable

$$x = t^q.$$

Comme $q \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$t \longmapsto t^q$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, 1]$, avec

$$x = 0 \iff t = 0 \quad \text{et} \quad x = 1 \iff t = 1.$$

De plus,

$$dx = qt^{q-1} dt$$

et

$$x^{p/q} = (t^q)^{p/q} = t^p.$$

On obtient alors

$$S_{p,q} = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{1}{1+x^{p/q}} dx = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{qt^{q-1}}{1+t^p} dt = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p} dt.$$

Ainsi, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$S_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p} dt.$$

2 Calcul des $S_{p,q}$ dans trois cas particuliers

L'objectif de cette partie est de déterminer une formulation explicite de la somme de la série congruo-harmonique de paramètres p et q dans trois cas particuliers. On définit pour cela les trois ensembles suivants :

$$E_1 := \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : p = q\},$$

$$E_2 := \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : p < q, p \mid q\},$$

$$E_3 := \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : p > q\}.$$

Enfin, pour tout couple $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ fixé, on définit la fraction rationnelle $F(X)$ par

$$F(X) := \frac{X^{q-1}}{1+X^p}.$$

9 ▷ Montrer que, pour tout $(p, q) \in E_1$,

$$(F1) \quad S_{p,q} = \frac{\ln 2}{p}.$$

Réponse

Soit $(p, q) \in E_1$. Par définition de E_1 , on a $p = q$.
Par définition de la série congruo-harmonique,

$$S_{p,q} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{pk + q}.$$

Comme $q = p$, on obtient

$$S_{p,p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{pk + p}.$$

Or $pk + p = p(k + 1)$, donc

$$S_{p,p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{p(k+1)} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{p} S_{1,1}.$$

D'après la question 3 des préliminaires,

$$S_{1,1} = \ln 2.$$

Ainsi,

$$S_{p,p} = \frac{\ln 2}{p}.$$

Puisque $p = q$ pour tout $(p, q) \in E_1$, on conclut que

$$\boxed{\forall (p, q) \in E_1, \quad S_{p,q} = \frac{\ln 2}{p}.$$

10 ▷ Pour tout couple $(p, q) \in E_2$, montrer qu'il existe une constante $\lambda := \lambda(p, q)$ que l'on déterminera, telle que

$$(F2) \quad S_{p,q} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{p} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

Réponse

Soit $(p, q) \in E_2$. Par définition de E_2 , on a

$$p < q \quad \text{et} \quad p \mid q.$$

Puisque p divise q , il existe donc un entier $\lambda \in \mathbb{N}^*$ tel que $q = \lambda p$. Cet entier est nécessairement

$$\lambda = \frac{q}{p}.$$

De plus, comme $p < q$, on a $\lambda \geq 2$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$pk + q = pk + \lambda p = p(k + \lambda).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 S_{p,q} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{pk + q} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{p(k + \lambda)} \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k + \lambda} \\
 &= \frac{1}{p} S_{1,\lambda}.
 \end{aligned}$$

Or, puisque $\lambda \geq 2$, on peut appliquer le résultat de la question 4 des préliminaires :

$$S_{1,\lambda} = (-1)^\lambda (\phi_{1,1}(\lambda - 2) - \ln 2).$$

Par définition de $\phi_{1,1}$,

$$\phi_{1,1}(\lambda - 2) = \sum_{j=0}^{\lambda-2} \frac{(-1)^j}{j+1}.$$

En effectuant le changement d'indice

$$k = j + 1,$$

on obtient

$$\phi_{1,1}(\lambda - 2) = \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 S_{p,q} &= \frac{(-1)^\lambda}{p} \left(\sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \right) \\
 &= \frac{(-1)^{\lambda-1}}{p} \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).
 \end{aligned}$$

Finalement, en posant

$$\boxed{\lambda = \lambda(p, q) = \frac{q}{p} \in \mathbb{N}, \quad \lambda \geq 2},$$

on obtient

$$\boxed{S_{p,q} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{p} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)}.$$

Dans le reste de la partie 2, on fixe un couple $(p, q) \in E_3$.

11 ▷ Montrer qu'il existe des constantes $(a_0, b_0, \dots, b_{\lfloor p/2 \rfloor - 1}) \in \mathbb{C}^{\lfloor p/2 \rfloor + 1}$ telles que

$$F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \cdot \frac{a_0}{X + 1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} \right),$$

où les $\omega_{p,k}$ sont des constantes que l'on précisera et $F(X)$ la fraction rationnelle définie au début de cette partie.

Réponse

On fixe $(p, q) \in E_3$. Par définition, on a $p > q$. Posons

$$P(X) = X^p + 1$$

de sorte que

$$F(X) = \frac{X^{q-1}}{P(X)}.$$

Comme $q < p$, on a

$$\deg(X^{q-1}) = q - 1 < p = \deg(P),$$

donc F est une fraction rationnelle sans partie polynomiale.

Cherchons tout d'abord les racines de P . Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = 0 \iff z^p = -1.$$

Comme $-1 = e^{i(\pi+2k\pi)}$ pour $k \in \mathbb{Z}$, les p racines de P sont

$$x_k = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{p}}, \quad k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket.$$

Ces racines sont deux à deux distinctes. Ainsi, P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, et la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$F(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{c_k}{X - x_k},$$

où $c_0, \dots, c_{p-1} \in \mathbb{C}$.

Regroupons maintenant les racines conjuguées. Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on a

$$\overline{x_k} = e^{-\frac{(2k+1)i\pi}{p}} = e^{\frac{(2p-2k-1)i\pi}{p}} = x_{p-k-1}.$$

Comme F est une fraction rationnelle à coefficients réels, $\overline{F(X)} = F(X)$ donc par unicité de la décomposition en éléments simples, les coefficients associés à deux pôles conjugués sont eux-mêmes conjugués. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on a

$$c_{p-k-1} = \overline{c_k}.$$

Distinguons alors les deux cas selon la parité de p .

Premier cas : p est pair.

Écrivons $p = 2u$. Les indices de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ se regroupent par couples

$$(k, p-k-1), \quad k \in \llbracket 0, u-1 \rrbracket.$$

Il n'y a donc aucune racine réelle isolée.

Pour tout $k \in \llbracket 0, \lfloor p/2 \rfloor - 1 \rrbracket$, on pose

$$\omega_{p,k} := x_k = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{p}}$$

et

$$b_k := c_k.$$

Alors

$$x_{p-k-1} = \overline{\omega_{p,k}} \quad \text{et} \quad c_{p-k-1} = \overline{b_k}.$$

Par conséquent,

$$F(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} \right).$$

Or, puisque p est pair,

$$\frac{1 - (-1)^p}{2} = 0.$$

Fixons $a_0 \in \mathbb{C}$ quelconque. On aboutit à

$$F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{a_0}{X + 1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} \right).$$

Deuxième cas : p est impair.

Écrivons $p = 2u + 1$. Les indices

$$k \in \llbracket 0, u - 1 \rrbracket$$

se regroupent encore avec les indices $p - k - 1$. Il reste toutefois l'indice

$$u = \frac{p - 1}{2} = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor.$$

La racine correspondante vaut

$$x_u = e^{\frac{(2u+1)i\pi}{p}} = e^{i\pi} = -1.$$

On pose alors

$$a_0 := c_u$$

et, pour tout

$$k \in \llbracket 0, \lfloor p/2 \rfloor - 1 \rrbracket, \\ \omega_{p,k} := e^{\frac{(2k+1)i\pi}{p}} \quad \text{et} \quad b_k := c_k.$$

On obtient

$$F(X) = \frac{a_0}{X + 1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} \right).$$

Or, puisque p est impair,

$$\frac{1 - (-1)^p}{2} = 1.$$

Ainsi, dans les deux cas, en définissant

$$\omega_{p,k} = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{p}}, \quad k \in \llbracket 0, \lfloor p/2 \rfloor - 1 \rrbracket,$$

il existe des constantes

$$(a_0, b_0, \dots, b_{\lfloor p/2 \rfloor - 1}) \in \mathbb{C}^{\lfloor p/2 \rfloor + 1}$$

telles que

$$F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{a_0}{X + 1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} \right).$$

Dans le cas où p est pair, on posera $a_0 = 0$.

12 ▷ Calculer alors a_0 dans le cas où p est impair puis montrer que, pour tout entier $k \in \llbracket 0, \lfloor p/2 \rfloor - 1 \rrbracket$, b_k peut s'écrire sous la forme

$$b_k = -\frac{1}{p} e^{iq\theta_k},$$

où l'on a posé $\theta_k := (2k+1)\frac{\pi}{p}$.

Réponse

On rappelle que

$$F(X) = \frac{X^{q-1}}{1+X^p}.$$

D'après la question précédente, les pôles de F sont les racines de $X^p + 1$, qui sont toutes simples.

Calcul de a_0 lorsque p est impair.

Lorsque p est impair, -1 est une racine de $X^p + 1$, donc -1 est un pôle simple de F . Le coefficient a_0 associé au terme

$$\frac{a_0}{X+1}$$

est alors donné par

$$a_0 = \lim_{X \rightarrow -1} (X+1)F(X).$$

Or, puisque

$$X^p + 1 = (X+1) \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k X^k,$$

on obtient

$$a_0 = \lim_{X \rightarrow -1} \frac{X^{q-1}}{\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k X^k} = \frac{(-1)^{q-1}}{\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k (-1)^k},$$

la dernière égalité découlant par continuité des expressions en -1 . Ainsi,

$$a_0 = \frac{(-1)^{q-1}}{p}.$$

Calcul de b_k .

Soit

$$k \in \llbracket 0, \lfloor p/2 \rfloor - 1 \rrbracket.$$

On rappelle que

$$\omega_{p,k} = e^{i\theta_k}, \quad \theta_k = (2k+1)\frac{\pi}{p}.$$

Par construction, $\omega_{p,k}$ est une racine de $X^p + 1$. Dans la décomposition en éléments simples de F , le terme associé au pôle simple $\omega_{p,k}$ est

$$\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}}.$$

On a donc

$$b_k = \lim_{X \rightarrow \omega_{p,k}} (X - \omega_{p,k})F(X).$$

Ainsi,

$$b_k = \lim_{X \rightarrow \omega_{p,k}} \frac{(X - \omega_{p,k})X^{q-1}}{X^p + 1}.$$

Comme $\omega_{p,k}$ est une racine simple de $P(X) = X^p + 1$, on peut écrire

$$P(X) = (X - \omega_{p,k})Q(X),$$

pour un certain polynôme Q . Ainsi,

$$b_k = \lim_{X \rightarrow \omega_{p,k}} \frac{X^{q-1}}{Q(X)}.$$

Dérivons le polynôme P ,

$$P'(X) = Q(X) + (X - \omega_{p,k})Q'(X),$$

et évaluons cette égalité en $\omega_{p,k}$ pour obtenir

$$Q(\omega_{p,k}) = P'(\omega_{p,k}) = p\omega_{p,k}^{p-1}.$$

Par conséquent,

$$b_k = \frac{\omega_{p,k}^{q-1}}{p\omega_{p,k}^{p-1}}.$$

Comme $\omega_{p,k} \neq 0$, on peut simplifier les puissances :

$$b_k = \frac{1}{p} \omega_{p,k}^{(q-1)-(p-1)} = \frac{1}{p} \omega_{p,k}^{q-p}.$$

Or

$$\omega_{p,k}^{q-p} = \frac{\omega_{p,k}^q}{\omega_{p,k}^p}.$$

Comme nous avons montré que $\omega_{p,k}^p = -1$, il vient

$$b_k = -\frac{1}{p} \omega_{p,k}^q.$$

Enfin,

$$\omega_{p,k} = e^{i\theta_k},$$

donc

$$\omega_{p,k}^q = (e^{i\theta_k})^q = e^{iq\theta_k}.$$

On obtient finalement

$$\forall k \in \llbracket 0, \lfloor p/2 \rfloor - 1 \rrbracket, \quad b_k = -\frac{1}{p} e^{iq\theta_k}, \quad \theta_k = (2k+1)\frac{\pi}{p}.$$

13 ▷ En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} F_k(X),$$

où, pour tout $0 \leq k \leq \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$F_k(X) := \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1}.$$

Réponse

D'après la question 11, on dispose de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$:

$$F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{a_0}{X + 1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} \right).$$

D'après la question précédente, lorsque p est impair,

$$a_0 = \frac{(-1)^{q-1}}{p},$$

et, lorsque p est pair, $1 - (-1)^p = 0$.

Ainsi, quelque soit la parité, le terme associé au pôle réel -1 peut s'écrire

$$\frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \frac{1}{X + 1}.$$

Considérons maintenant, pour

$$k \in \llbracket 0, \lfloor p/2 \rfloor - 1 \rrbracket,$$

les deux termes associés aux pôles conjugués $\omega_{p,k}$ et $\overline{\omega_{p,k}}$.

On rappelle que

$$\theta_k = (2k + 1) \frac{\pi}{p}, \quad \omega_{p,k} = e^{i\theta_k},$$

et, d'après la question 12,

$$b_k = -\frac{1}{p} e^{iq\theta_k}.$$

Par conjugaison, on obtient

$$\overline{b_k} = -\frac{1}{p} e^{-iq\theta_k}, \quad \overline{\omega_{p,k}} = e^{-i\theta_k}.$$

Ainsi,

$$\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} = -\frac{1}{p} \left(\frac{e^{iq\theta_k}}{X - e^{i\theta_k}} + \frac{e^{-iq\theta_k}}{X - e^{-i\theta_k}} \right).$$

Réduisons les deux fractions au même dénominateur. On a

$$\begin{aligned} & (X - e^{i\theta_k})(X - e^{-i\theta_k}) \\ &= X^2 - (e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k})X + e^{i\theta_k}e^{-i\theta_k}. \end{aligned}$$

Or, d'après les formules d'Euler,

$$e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k} = 2 \cos(\theta_k)$$

et

$$e^{i\theta_k}e^{-i\theta_k} = 1.$$

Par conséquent,

$$(X - e^{i\theta_k})(X - e^{-i\theta_k}) = X^2 - 2 \cos(\theta_k)X + 1.$$

Pour le numérateur, on obtient

$$\begin{aligned} & e^{iq\theta_k}(X - e^{-i\theta_k}) + e^{-iq\theta_k}(X - e^{i\theta_k}) \\ &= X(e^{iq\theta_k} + e^{-iq\theta_k}) - (e^{i(q-1)\theta_k} + e^{-i(q-1)\theta_k}). \end{aligned}$$

À nouveau, grâce à la formule d'Euler

$$e^{iu} + e^{-iu} = 2 \cos(u),$$

il vient

$$e^{iq\theta_k} + e^{-iq\theta_k} = 2 \cos(q\theta_k)$$

et

$$e^{i(q-1)\theta_k} + e^{-i(q-1)\theta_k} = 2 \cos((q-1)\theta_k).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} &= -\frac{1}{p} \frac{2 \cos(q\theta_k)X - 2 \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2 \cos(\theta_k)X + 1} \\ &= -\frac{2 \cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{p} \frac{1}{X^2 - 2 \cos(\theta_k)X + 1}. \end{aligned}$$

En posant, pour tout

$$\begin{aligned} k &\in \llbracket 0, \lfloor p/2 \rfloor - 1 \rrbracket, \\ F_k(X) &:= \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2 \cos(\theta_k)X + 1}, \end{aligned}$$

on a donc

$$\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} = -\frac{2}{p} F_k(X).$$

En reportant cette expression dans la décomposition de F , on obtient finalement

$$F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \cdot \frac{1}{X + 1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} F_k(X).$$

On admet que les F_k sont continues sur $[0, 1]$ et que pour tout $0 \leq k \leq \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$\int_0^1 F_k(t) dt = \cos(q\theta_k) \ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) - \frac{\pi}{2p} (p - 1 - 2k) \sin(q\theta_k).$$

14 ▷ Montrer que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair} \\ \frac{(-1)^{q+1}}{2} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}.$$

Réponse

On rappelle que

$$\theta_k = (2k + 1) \frac{\pi}{p}.$$

Comme $(p, q) \in E_3$, on a

$$1 \leq q < p.$$

Considérons tout d'abord la somme

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{iq\theta_k}.$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$,

$$e^{iq\theta_k} = e^{iq(2k+1)\pi/p} = e^{iq\pi/p} (e^{2iq\pi/p})^k.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{iq\theta_k} = e^{iq\pi/p} \sum_{k=0}^{p-1} (e^{2iq\pi/p})^k.$$

Or, puisque $1 \leq q < p$, on a

$$e^{2iq\pi/p} \neq 1.$$

On peut donc appliquer la formule de la somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{iq\theta_k} = e^{iq\pi/p} \frac{1 - (e^{2iq\pi/p})^p}{1 - e^{2iq\pi/p}} = e^{iq\pi/p} \frac{1 - e^{2iq\pi}}{1 - e^{2iq\pi/p}} = 0.$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos(q\theta_k) = 0.$$

Il reste à relier cette somme à celle demandée. Distinguons les deux cas selon la parité de p .

Premier cas : p est pair.

Pour tout

$$k \in \llbracket 0, p/2 - 1 \rrbracket,$$

on a

$$\theta_{p-k-1} = (2(p-k-1) + 1) \frac{\pi}{p} = (2p - 2k - 1) \frac{\pi}{p} = 2\pi - \theta_k.$$

Par conséquent,

$$\cos(q\theta_{p-k-1}) = \cos(q(2\pi - \theta_k)) = \cos(2q\pi - q\theta_k) = \cos(q\theta_k).$$

Les termes de la somme complète se regroupent donc deux à deux, et

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos(q\theta_k) = 2 \sum_{k=0}^{p/2-1} \cos(q\theta_k).$$

Comme la somme de gauche est nulle,

$$\sum_{k=0}^{p/2-1} \cos(q\theta_k) = 0.$$

Puisque, lorsque p est pair,

$$\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = \frac{p}{2},$$

on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = 0.}$$

Deuxième cas : p est impair.

Posons

$$u = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = \frac{p-1}{2}.$$

Comme précédemment, pour tout $k \in \llbracket 0, u-1 \rrbracket$, les indices k et $p-k-1$ donnent les mêmes cosinus. Il reste cependant le terme d'indice u . Or

$$\theta_u = (2u+1)\frac{\pi}{p} = p\frac{\pi}{p} = \pi.$$

Ainsi,

$$\cos(q\theta_u) = \cos(q\pi) = (-1)^q.$$

La somme complète s'écrit donc

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos(q\theta_k) = 2 \sum_{k=0}^{\ell-1} \cos(q\theta_k) + (-1)^q.$$

Comme cette somme est nulle,

$$2 \sum_{k=0}^{\ell-1} \cos(q\theta_k) = -(-1)^q = (-1)^{q+1}.$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = \frac{(-1)^{q+1}}{2}.$$

Finalement, on obtient bien les valeurs indiquées :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair,} \\ \frac{(-1)^{q+1}}{2} & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}$$

15 ▷ Dédurre des questions précédentes que, pour tout $(p, q) \in E_3$,

$$(F3) \quad S_{p,q} = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) - 2 \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \ln \left(\sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) \right).$$

Réponse

D'après la question 8, on a

$$S_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p} dt = \int_0^1 F(t) dt.$$

Or, d'après la question 13, la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est

$$F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} F_k(X).$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient donc

$$S_{p,q} = \frac{1 - (-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \int_0^1 F_k(t) dt.$$

On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$$

De plus, l'énoncé donne, pour tout $k \in \llbracket 0, \lfloor p/2 \rfloor - 1 \rrbracket$,

$$\int_0^1 F_k(t) dt = \cos(q\theta_k) \ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) - \frac{\pi}{2p} (p-1-2k) \sin(q\theta_k).$$

De plus,

$$\ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) = \ln 2 + \ln \left(\sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right).$$

En reportant ces expressions, il vient

$$\begin{aligned} S_{p,q} = & \frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \ln 2 - \frac{2 \ln 2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \\ & - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \ln \left(\sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{p^2} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} (p-1-2k) \sin(q\theta_k). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que les deux termes contenant $\ln 2$ se compensent. Pour cela, distinguons les deux cas selon la parité de p .

Premier cas : p est pair.

Alors

$$1 - (-1)^p = 0.$$

De plus, d'après la question 14,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = 0.$$

Les deux termes contenant $\ln 2$ sont donc nuls.

Deuxième cas : p est impair.

Alors

$$\frac{1 - (-1)^p}{2} = 1.$$

De plus, d'après la question 14,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = \frac{(-1)^{q+1}}{2}.$$

Ainsi, la somme des termes contenant $\ln 2$ vaut

$$\frac{(-1)^{q-1}}{p} \ln 2 - \frac{2 \ln 2}{p} \cdot \frac{(-1)^{q+1}}{2} = \frac{\ln 2}{p} ((-1)^{q-1} - (-1)^{q+1}) = 0,$$

car

$$(-1)^{q-1} = (-1)^{q+1}.$$

Dans tous les cas, les termes contenant $\ln 2$ disparaissent. Il reste donc

$$S_{p,q} = \frac{\pi}{p^2} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \ln \left(\sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right).$$

En factorisant par $\frac{1}{p}$, on obtient finalement

$$S_{p,q} = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) - 2 \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \ln \left(\sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) \right).$$

16 ▷ En déduire les valeurs exactes de $S_{2,1}$ et $S_{3,1}$.

Réponse

On utilise la formule obtenue à la question précédente : pour tout $(p, q) \in E_3$,

$$S_{p,q} = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) - 2 \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \ln \left(\sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) \right),$$

avec

$$\theta_k = (2k+1) \frac{\pi}{p}.$$

Calcul de $S_{2,1}$.

Comme $2 > 1$, on a $(2, 1) \in E_3$. De plus,

$$\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor - 1 = 0,$$

donc les deux sommes de la formule précédente ne comportent qu'un seul terme, correspondant à $k = 0$.

On a

$$\theta_0 = (2 \times 0 + 1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$\sin(\theta_0) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

et

$$\cos(\theta_0) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_{2,1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} (2-1) \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) - 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$S_{2,1} = \frac{\pi}{4}.$$

Calcul de $S_{3,1}$.

Comme $3 > 1$, on a $(3, 1) \in E_3$. De plus,

$$\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor - 1 = 0,$$

donc, là encore, les deux sommes ne comportent qu'un seul terme correspondant à $k = 0$.

On a

$$\theta_0 = (2 \times 0 + 1) \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Ainsi,

$$\sin(\theta_0) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(\theta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

et

$$\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

La formule de la question 15 donne alors

$$\begin{aligned} S_{3,1} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} (3-1) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Or

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_{3,1} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln 2 \right) \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{\ln 2}{3}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$S_{2,1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad S_{3,1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{\ln 2}{3}.$$

3 Quelques calculs de probabilités

L'objectif de cette partie est d'évaluer la probabilité qu'un couple d'entiers $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ pris au hasard appartienne au domaine d'application d'au moins l'une des formules (F1), (F2) et (F3) obtenues dans la partie 2.

On fixe pour cela $n \in \mathbb{N}^*$ et on décide de tirer successivement et avec remise deux entiers p et q selon une loi uniforme sur l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$. On définit alors les événements suivants, où E_1 , E_2 et E_3 sont les trois ensembles définis dans la partie 2 :

- E_n : "On obtient $(p, q) \in E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ".
- A_n : "On obtient $p = q$ ".
- B_n : "On obtient $q > p$ et q est divisible par p ".
- C_n : "On obtient $p > q$ ".

17 ▷ Justifier que l'ensemble $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme une partition de E_n .

Réponse

Par définition,

$$E_n = \{(p, q) \in E_1 \cup E_2 \cup E_3\}.$$

Or les événements A_n , B_n et C_n s'écrivent respectivement

$$A_n = \{(p, q) \in E_1\},$$

$$B_n = \{(p, q) \in E_2\},$$

et

$$C_n = \{(p, q) \in E_3\}.$$

Il suffit donc de vérifier que les ensembles E_1 , E_2 et E_3 sont deux à deux disjoints. On rappelle que

$$E_1 = \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p = q\},$$

$$E_2 = \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p < q, p \mid q\},$$

et

$$E_3 = \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p > q\}.$$

Les conditions

$$p = q, \quad p < q, \quad p > q$$

sont incompatibles deux à deux. Ainsi,

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_1 \cap E_3 = \emptyset, \quad E_2 \cap E_3 = \emptyset.$$

Par conséquent, les événements A_n , B_n et C_n sont deux à deux disjoints.

De plus, par définition de E_n ,

$$E_n = A_n \cup B_n \cup C_n.$$

On en déduit que

$$\boxed{\{A_n, B_n, C_n\} \text{ forme une partition de } E_n.}$$

18 ▷ Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ puis $\mathbb{P}(C_n)$.

Réponse

Les deux entiers p et q sont tirés successivement, avec remise, selon la loi uniforme sur

$$\llbracket 1, n \rrbracket.$$

Ainsi, tous les couples

$$(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$$

sont équiprobables, et il y en a

$$n^2.$$

Calcul de $\mathbb{P}(A_n)$.

Par définition,

$$A_n = \{p = q\}.$$

Pour réaliser l'événement A_n , on peut choisir librement la valeur de p parmi les n entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, puis la valeur de q est imposée puisqu'il faut avoir

$$q = p.$$

Il y a donc exactement n couples favorables :

$$(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n).$$

Comme tous les couples sont équiprobables,

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}}.$$

Calcul de $\mathbb{P}(C_n)$.

Par définition,

$$C_n = \{p > q\}.$$

Par symétrie des rôles de p et q , on a

$$\mathbb{P}(p > q) = \mathbb{P}(q > p).$$

De plus, les trois événements

$$\{p = q\}, \quad \{p > q\}, \quad \{q > p\}$$

sont deux à deux disjoints et forment une partition de l'univers. Ainsi,

$$1 = \mathbb{P}(p = q) + \mathbb{P}(p > q) + \mathbb{P}(q > p).$$

Comme

$$\mathbb{P}(p = q) = \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$$

et

$$\mathbb{P}(p > q) = \mathbb{P}(q > p),$$

on obtient

$$1 = \frac{1}{n} + 2\mathbb{P}(C_n).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_n) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{n-1}{2n}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(C_n) = \frac{n-1}{2n}}.$$

19 ▷ Montrer que

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^n \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \frac{1}{n},$$

et en déduire $\mathbb{P}(A_n \cup B_n)$.

Réponse

Par définition,

$$B_n = \{q > p \text{ et } p \mid q\}.$$

Les deux entiers p et q étant tirés indépendamment et uniformément dans

$$\llbracket 1, n \rrbracket,$$

on peut conditionner par la valeur prise par p .

Les événements

$$\{p = k\}, \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

forment un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(p = k) \mathbb{P}(B_n \mid p = k).$$

Comme p suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(p = k) = \frac{1}{n}.$$

Fixons maintenant $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Sous la condition $p = k$, l'événement B_n est réalisé si et seulement si

$$q > k \quad \text{et} \quad k \mid q.$$

Les valeurs possibles de q sont donc les multiples de k de la forme

$$q = rk,$$

avec

$$r \geq 2$$

puisque $q > k$, et

$$rk \leq n,$$

c'est-à-dire

$$r \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

Ainsi,

$$r \in \llbracket 2, \lfloor n/k \rfloor \rrbracket,$$

et il y a donc

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1$$

valeurs possibles pour q .

Comme q est uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient

$$\mathbb{P}(B_n \mid p = k) = \frac{1}{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 1, \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \frac{1}{n}.$$

On cherche maintenant $\mathbb{P}(A_n \cup B_n)$.

D'après la question 17, les événements A_n et B_n sont disjoints. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_n \cup B_n) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n).$$

Or, d'après la question 18,

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n \cup B_n) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(A_n \cup B_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

20 ▷ En notant $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ la série harmonique, montrer que

$$H_n \sim \ln n \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Réponse

On pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On va comparer cette somme à l'intégrale de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x},$$

qui est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et pour tout $x \in [k, k+1]$, on a, puisque $x \mapsto 1/x$ est décroissante,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, on obtient

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$$

En sommant ces inégalités pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} = H_n - 1,$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_n - \frac{1}{n}.$$

De plus,

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n.$$

Ainsi,

$$H_n - 1 \leq \ln n \leq H_n - \frac{1}{n}.$$

On en déduit en particulier

$$\ln n \leq H_n \leq \ln n + 1.$$

Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$, donc en divisant par $\ln n$,

$$1 \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Or

$$\frac{1}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes,

$$\frac{H_n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{H_n \sim \ln n \quad (n \rightarrow +\infty).}$$

21 ▷ Montrer alors que

$$\mathbb{P}(A_n \cup B_n) \sim \frac{\ln n}{n} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Réponse

D'après la question 19, on a

$$\mathbb{P}(A_n \cup B_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient

$$\frac{n}{k} - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \frac{n}{k}.$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n , il vient

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k} - 1 \right) \leq \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{k}.$$

Or, en notant

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{k} = nH_n$$

et

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k} - 1 \right) = nH_n - n.$$

Par conséquent,

$$nH_n - n \leq \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq nH_n.$$

En divisant par n^2 , on obtient

$$\frac{H_n - 1}{n} \leq \mathbb{P}(A_n \cup B_n) \leq \frac{H_n}{n}.$$

On divise l'encadrement par $\frac{\ln n}{n} > 0$ pour $n \geq 2$:

$$\frac{H_n - 1}{\ln n} \leq \frac{\mathbb{P}(A_n \cup B_n)}{\ln n/n} \leq \frac{H_n}{\ln n}.$$

Or, d'après la question précédente,

$$\frac{H_n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et

$$\frac{H_n - 1}{\ln n} = \frac{H_n}{\ln n} - \frac{1}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\frac{\mathbb{P}(A_n \cup B_n)}{\ln n/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_n \cup B_n) \sim \frac{\ln n}{n} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

22 ▷ En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n).$$

Réponse

D'après la question 17, les événements A_n , B_n et C_n forment une partition de E_n . Ainsi,

$$E_n = A_n \cup B_n \cup C_n,$$

avec des événements deux à deux disjoints.

On peut donc écrire

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(A_n \cup B_n) + \mathbb{P}(C_n).$$

D'après la question 21,

$$\mathbb{P}(A_n \cup B_n) \sim \frac{\ln n}{n}.$$

Or

$$\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc

$$\mathbb{P}(A_n \cup B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par ailleurs, d'après la question 18,

$$\mathbb{P}(C_n) = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

d'où

$$\mathbb{P}(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(A_n \cup B_n) + \mathbb{P}(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2}.$$

4 Vitesse de convergence des $S_{p,q}$

Dans cette dernière partie, on s'intéresse à la vitesse de convergence des séries congruo-harmoniques. On introduit pour cela la définition suivante.

Définition 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers une limite réelle l telle que $u_n \neq l$ à partir d'un certain rang. On définit alors, sous réserve de convergence, la vitesse de convergence V de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \right|.$$

On qualifie alors la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selon la valeur de V :

- Si $V = 0$: la convergence sera qualifiée de *supra-linéaire*.
- Si $V \in]0, 1[$: la convergence sera qualifiée de *linéaire*.
- Si $V = 1$: la convergence sera qualifiée d'*infra-linéaire*.

On définit alors la vitesse de convergence d'une série comme étant celle de la suite de ses sommes partielles.

On définit enfin, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'application $R_{p,q} := \frac{1}{q} I_{p,q}$ où $I_{p,q}$ est l'application définie dans la partie 1.

23 ▷ À l'aide du changement de variables $s = x^{n+1}$ dans $I_{p,q}(n)$, démontrer que

$$R_{p,q}(n) \sim \frac{1}{2pn} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

📖 Réponse

On rappelle que

$$R_{p,q}(n) = \frac{1}{q} I_{p,q}(n)$$

et que, par définition de $I_{p,q}$,

$$R_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx,$$

où

$$\alpha_{p,q} = \frac{p}{q} > 0.$$

Effectuons le changement de variable proposé

$$s = x^{n+1}.$$

L'application

$$x \mapsto x^{n+1}$$

est une bijection strictement croissante de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. On a

$$x = s^{1/(n+1)}$$

et

$$ds = (n+1)x^n dx.$$

Ainsi,

$$dx = \frac{1}{n+1} s^{-n/(n+1)} ds.$$

De plus,

$$x^{(n+1)\alpha_{p,q}} = (x^{n+1})^{\alpha_{p,q}} = s^{\alpha_{p,q}},$$

et

$$x^{\alpha_{p,q}} = s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} R_{p,q}(n) &= \frac{1}{q(n+1)} \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}} s^{-n/(n+1)}}{1+s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}} ds \\ &= \frac{1}{q(n+1)} \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}-n/(n+1)}}{1+s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}} ds. \end{aligned}$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $s \in]0, 1]$,

$$f_n(s) = \frac{s^{\alpha_{p,q}-n/(n+1)}}{1+s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}}.$$

Étudions la limite de l'intégrale de f_n .

Continuité : Pour tout $n \in \mathbb{R}$, $s \mapsto f_n(s)$ est une fonction continue sur $]0, 1]$.

Convergence ponctuelle : Pour tout $s \in]0, 1]$ fixé,

$$\alpha_{p,q} - \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha_{p,q} - 1$$

et

$$\frac{\alpha_{p,q}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi,

$$s^{\alpha_{p,q}-n/(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s^{\alpha_{p,q}-1}$$

et

$$s^{\alpha_{p,q}/(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

On obtient donc

$$f_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} s^{\alpha_{p,q}-1}.$$

Domination (indépendante du paramètre) : Montrons maintenant que les fonctions f_n sont dominées par une fonction intégrable indépendante de n .

Pour tout $s \in]0, 1]$,

$$1 + s^{\alpha_{p,q}/(n+1)} \geq 1,$$

donc

$$0 \leq f_n(s) \leq s^{\alpha_{p,q}-n/(n+1)}.$$

Or

$$\frac{n}{n+1} \leq 1,$$

donc

$$\alpha_{p,q} - \frac{n}{n+1} \geq \alpha_{p,q} - 1.$$

Comme $0 < s \leq 1$, la fonction $u \mapsto s^u$ est décroissante. Ainsi,

$$s^{\alpha_{p,q}-n/(n+1)} \leq s^{\alpha_{p,q}-1}.$$

Par conséquent,

$$0 \leq f_n(s) \leq s^{\alpha_{p,q}-1}.$$

Or la fonction

$$s \longmapsto s^{\alpha_{p,q}-1}$$

est intégrable sur $]0, 1]$ puisque

$$\alpha_{p,q} - 1 > -1$$

car $\alpha_{p,q} > 0$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui donne

$$\int_0^1 f_n(s) ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^1 s^{\alpha_{p,q}-1} ds = \frac{1}{2} \left[\frac{s^{\alpha_{p,q}}}{\alpha_{p,q}} \right]_0^1 = \frac{1}{2\alpha_{p,q}}.$$

Comme $\alpha_{p,q} = \frac{p}{q}$, on obtient

$$\frac{1}{2\alpha_{p,q}} = \frac{q}{2p}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 f_n(s) ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{q}{2p}.$$

Par conséquent,

$$R_{p,q}(n) = \frac{1}{q(n+1)} \int_0^1 f_n(s) ds \sim \frac{1}{q(n+1)} \frac{q}{2p} = \frac{1}{2p(n+1)}.$$

Enfin, on obtient

$$\boxed{R_{p,q}(n) \sim \frac{1}{2pn} \quad (n \rightarrow +\infty).}$$

24 ▷ En déduire la vitesse de convergence de la série congruo-harmonique alternée $\sum u_k$, c'est-à-dire celle de la suite des sommes partielles $(\phi_{p,q}(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

📖 Réponse

D'après la question 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx + (-1)^n I_{p,q}(n) \right).$$

Or, au cours de la question 8, on a montré que

$$S_{p,q} = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx.$$

De plus, par définition,

$$R_{p,q}(n) = \frac{1}{q} I_{p,q}(n).$$

Ainsi,

$$\phi_{p,q}(n) = S_{p,q} + (-1)^n R_{p,q}(n),$$

et donc

$$\phi_{p,q}(n) - S_{p,q} = (-1)^n R_{p,q}(n).$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,q}(n) = \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx > 0,$$

on a $R_{p,q}(n) > 0$. En particulier, $\phi_{p,q}(n) \neq S_{p,q}$, ce qui permet bien d'utiliser la définition de la vitesse de convergence.

On cherche donc

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\phi_{p,q}(n+1) - S_{p,q}}{\phi_{p,q}(n) - S_{p,q}} \right|.$$

À l'aide de l'expression précédente,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi_{p,q}(n+1) - S_{p,q}}{\phi_{p,q}(n) - S_{p,q}} \right| &= \left| \frac{(-1)^{n+1} R_{p,q}(n+1)}{(-1)^n R_{p,q}(n)} \right| \\ &= \frac{R_{p,q}(n+1)}{R_{p,q}(n)}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question 23,

$$R_{p,q}(n) \sim \frac{1}{2pn}.$$

On a donc également

$$R_{p,q}(n+1) \sim \frac{1}{2p(n+1)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{R_{p,q}(n+1)}{R_{p,q}(n)} \sim \frac{\frac{1}{2p(n+1)}}{\frac{1}{2pn}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi,

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\phi_{p,q}(n+1) - S_{p,q}}{\phi_{p,q}(n) - S_{p,q}} \right| = 1.$$

D'après la définition donnée dans l'énoncé, on en déduit que

la série congruo-harmonique alternée a une convergence infra-linéaire.

FIN DU PROBLÈME.