Proposition de corrigé

—

Concours Commun Mines-Ponts

Sujet 2 Mathématiques 2024, filière PSI

Étude de marche aléatoire

Si vous repérez une coquille, une erreur, ou si vous avez une question ou une suggestion, n'hésitez pas à me contacter !

Notations

On rappelle l'expression des coefficients binomiaux. Lorsque k et n sont deux entiers, on pose :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On pourra utiliser sans démonstration l'équivalent de Stirling, valable lorsque l'entier naturel n tend vers $+\infty$:

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

1 Une propriété sur les sommes de Riemann

Dans toute la suite, pour les réels $a < b$, on note $\mathscr{D}_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, continues sur l'intervalle $]a,b[$, intégrables sur $]a,b[$ et vérifiant de plus :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

1 ▷ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que la restriction g de la fonction f à l'intervalle $]a,b[$ appartient à l'ensemble $\mathscr{D}_{a,b}$.

☞ Réponse

Par restriction, la fonction g est continue sur $]a,b[$ et est prolongeable par continuité au segment $[a,b]$ donc est intégrable sur $]a,b[$.

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a + k\,\frac{b-a}{n} \in]a,b[$ d'où :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right) - \frac{f(a)}{n}.\end{aligned}$$

D'après le théorème des sommes de Riemann appliqué à f (qui est une fonction continue sur un segment), on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

De plus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a)}{n} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Comme f et g coïncident sur $]a,b[$ (et, on a vu précédemment que les deux fonctions sont intégrables sur $]a,b[$) on a :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt.$$

Il vient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt.$$

On vient de montrer que $\boxed{g \in \mathscr{D}_{a,b}.}$

2 ▷ En posant pour tout entier $k \geq 1$, $a_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2^{k+1}}$, $b_k = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2^{k+1}}$, montrer que l'on peut choisir un entier $k_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall k \geq k_0, \quad b_{k+1} < a_k.$$

En déduire que la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} k^2 \cdot 2^{k+1} \cdot (t-a_k), & \text{s'il existe un entier } k \geq k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k, a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}\right] \\ k^2 \cdot 2^{k+1} \cdot (b_k - t), & \text{s'il existe un entier } k \geq k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}, b_k\right] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction bien définie et continue sur $]0,1[$, intégrable sur $]0,1[$ et cette fonction f n'appartient pas à l'ensemble $\mathscr{D}_{0,1}$.

☞ Réponse

Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$a_k - b_{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Remarquons que pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a par le théorème des croissances comparées :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k(k+1)}{2^{k+n_0}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{k(k+1)}{\mathrm{e}^{(k+n_0)\ln(2)}} = 0,$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{2^{k+n_0}} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k(k+1)}\right).$$

Ainsi,

$$a_k - b_{k+1} \underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k(k+1)} + o\left(\frac{1}{k(k+1)}\right).$$

Autrement dit,

$$a_k - b_{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k(k+1)}.$$

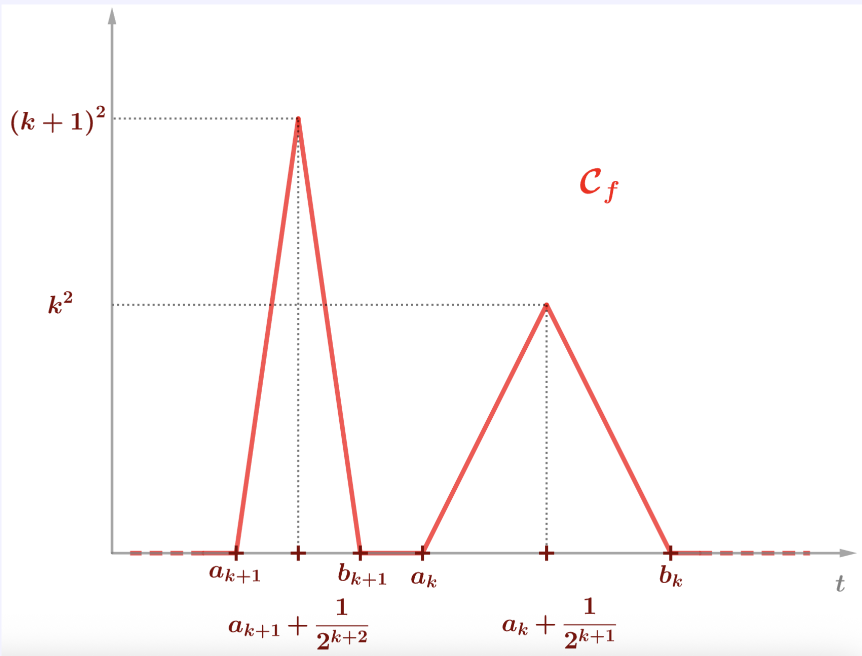
Quand k tend vers $+\infty$, $a_k - b_{k+1}$ est équivalente à $\dfrac{1}{k(k+1)}$ qui est strictement positive donc on en déduit que $a_k - b_{k+1}$ est strictement positive à partir d'un certain rang $k_0 \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi, $\boxed{\text{on peut choisir un entier } k_0 \geq 1 \text{ tel que pour tout } k \geq k_0,\ b_{k+1} < a_k.}$

Montrons que f est bien définie : Par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k < b_k$.
D'après ce qu'on vient d'établir, pour tout $k \geq k_0$, $a_{k+1} < b_{k+1} < a_k < b_k$.
Cela montre que les intervalles $([a_k, b_k])_{k \geq k_0}$ sont disjoints.
Soit $t \in]0,1[$ et on distingue différents cas :

- Supposons qu'il existe $k \geq k_0$ tel que $t \in [a_k, b_k]$. D'après ce qui précède, ce k est unique. On examine plusieurs cas :
  - Si $t \in [a_k, a_k + \frac{1}{2^{k+1}}[$, alors $f(t) = k^2 2^{k+1}(t - a_k)$ est bien définie.
  - Si $t \in]a_k + \frac{1}{2^{k+1}}, b_k]$, alors $f(t) = k^2 2^{k+1}(b_k - t)$ est bien définie.
  - Si $t = a_k + \frac{1}{2^{k+1}}$, alors $b_k - t = b_k - a_k - \frac{1}{2^{k+1}} = 2\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}$ et $t - a_k = \frac{1}{2^{k+1}}$ donc $f(t) = k^2 = k^2 2^{k+1}(t - a_k) = k^2 2^{k+1}(b_k - t)$ est bien définie.
- S'il n'existe pas de tel k, alors $f(t) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie.}}$

Une illustration graphique de la fonction f :



Montrons que f est continue : Comme la fonction f est affine par morceaux, elle est continue sur

$$\bigcup_{k \geq k_0} \left( ]b_{k+1}, a_k[\cup \left] a_k, a_k + \frac{1}{2^{k+1}} \right[\cup \left] a_k + \frac{1}{2^{k+1}}, b_k \right[\right) \cup]b_{k_0}, 1[.$$

On vérifie que la fonction f est continue en chaque a_k, $a_k+\frac{1}{2^{k+1}}$ et b_k pour $k \geq k_0$. Soit $k \geq k_0$. On a :

- D'un côté, $\lim\limits_{t\to a_k^+} f(t) = \lim\limits_{t\to a_k^+} k^2 2^{k+1}(t-a_k) = 0 = f(a_k)$.
  De l'autre côté, $\lim\limits_{t\to a_k^-} f(t) = \lim\limits_{t\to a_k^-} 0 = 0 = f(a_k)$.
  Ceci prouve que f est continue en a_k.
- D'un côté, $\lim\limits_{t\to b_k^-} f(t) = \lim\limits_{t\to b_k^-} k^2 2^{k+1}(b_k-t) = 0 = f(b_k)$.
  De l'autre côté, $\lim\limits_{t\to b_k^+} f(t) = \lim\limits_{t\to b_k^+} 0 = 0 = f(b_k)$.
  Ceci prouve que f est continue en b_k.
- D'un côté,
  $$\lim_{t\to\left(a_k+\frac{1}{2^{k+1}}\right)^+} f(t) = \lim_{t\to\left(a_k+\frac{1}{2^{k+1}}\right)^+} k^2 2^{k+1}(b_k-t) = k^2 = f\left(a_k+\frac{1}{2^{k+1}}\right).$$
  De l'autre côté,
  $$\lim_{t\to\left(a_k+\frac{1}{2^{k+1}}\right)^-} f(t) = \lim_{t\to\left(a_k+\frac{1}{2^{k+1}}\right)^-} k^2 2^{k+1}(t-a_k) = k^2 = f\left(a_k+\frac{1}{2^{k+1}}\right).$$
  Ceci prouve que f est continue en $a_k+\frac{1}{2^{k+1}}$.

On en déduit que f est continue sur
$$\bigcup_{k\geq k_0}\left([b_{k+1},a_k]\cup\left[a_k,a_k+\frac{1}{2^{k+1}}\right]\cup\left[a_k+\frac{1}{2^{k+1}},b_k\right]\right)\cup[b_{k_0},1[.$$
Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$, la réunion d'intervalles ci-dessus est égale à $]0,1[$. On vient de montrer que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur }]0,1[.}$

Montrons que f est intégrable : Soit $k \geq k_0$. On commence par calculer l'intégrale de f sur $[a_k,b_k]$.

$$\begin{aligned}
\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt &= \int_{a_k}^{a_k+\frac{1}{2^{k+1}}} f(t)\,dt + \int_{a_k+\frac{1}{2^{k+1}}}^{b_k} f(t)\,dt \\
&= \int_{a_k}^{a_k+\frac{1}{2^{k+1}}} k^2 2^{k+1}(t-a_k)\,dt + \int_{a_k+\frac{1}{2^{k+1}}}^{b_k} k^2 2^{k+1}(b_k-t)\,dt \\
&= k^2 2^{k+1}\left(\left[\frac{(t-a_k)^2}{2}\right]_{a_k}^{a_k+\frac{1}{2^{k+1}}} + \left[-\frac{(b_k-t)^2}{2}\right]_{a_k+\frac{1}{2^{k+1}}}^{b_k}\right) \\
&= \frac{k^2 2^{k+1}}{2}\left((a_k+\frac{1}{2^{k+1}}-a_k)^2 + (b_k-a_k-\frac{1}{2^{k+1}})^2\right) \\
&= \frac{k^2 2^{k+1}}{2}\left(\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^2\right) \\
&= \frac{k^2}{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \geq k_0$, $\displaystyle\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt = \frac{k^2}{2^{k+1}}$ [a]

Comme f est nulle en dehors de $\bigcup_{k\geq k_0}[a_k, b_k]$, on a : Pour tout $n \geq k_0$,

$$\int_{a_n}^{1} f(t)\,dt = \sum_{k=k_0}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt = \sum_{k=k_0}^{n} \frac{k^2}{2^{k+1}}.$$

Or, par croissances comparées,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k^4}{2^{k+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{k^4}{\mathrm{e}^{(k+1)\ln(2)}} = 0,$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{k^2}{2^{k+1}} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Comme la série de terme général $\left(\dfrac{1}{k^2}\right)_{k\geq k_0}$ est une série de Riemann convergente, on en déduit que la série de terme général $\left(\dfrac{k^2}{2^{k+1}}\right)_{k\geq k_0}$ converge par comparaison de série à termes positifs.

Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, on a :

$$\int_{0}^{1} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{1} f(t)\,dt = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}}.$$

L'intégrale de gauche étant convergente, et f est positive, on en déduit que

$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est intégrable sur }]0,1[.}$

Soit $n \geq k_0$. Par définition de a_n, on a :

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(a_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = n^2.$$

Comme f est positive, on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}n^2 = n.$$

Par minoration, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right) = +\infty.$$

Or, on a vu ci-dessus que

$$\int_{0}^{1} f(t)\,dt = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}} < +\infty.$$

En conclusion, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'appartient pas à l'ensemble } \mathscr{D}_{0,1}.}$

Remarque : Cette question est un contre-exemple au fait que le théorème des sommes de Riemann n'est plus nécessairement valable lorsqu'on travaille avec des fonctions continues et intégrable sur un intervalle ouvert.

a. Remarquons qu'on aurait pu calculer l'intégrale autrement : L'aire sous la courbe correspond à l'aire d'un triangle de base $b_k - a_k = \frac{1}{2^k}$ et de hauteur k^2 d'où $\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\frac{1}{2^k}k^2 = \frac{k^2}{2^{k+1}}$.

Dans la suite, on définit la fonction :

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}. \end{array} \right.$$

3 ▷ Montrer que la fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1[$, puis montrer que la fonction φ appartient à $\mathscr{D}_{0,1}$.

☞ Réponse

La fonction φ est continue sur $]0,1[$ et est intégrable sur $]0,1[$ car on a une intégrale de Riemann convergente.
Comme la fonction $t \mapsto 2\sqrt{t}$ est une primitive de φ, on peut même calculer explicitement sa valeur :

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt = \Big[2\sqrt{t}\Big]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k/n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Comme la fonction φ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable en 0, on peut effectuer une comparaison série-intégrale pour trouver la limite :
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 < \int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{t}}dt,$$

donc en sommant ces inégalités pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{t}}dt.$$

Par la relation de Chasles et par calcul direct via la primitive, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int_1^n\frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{1} = 2\sqrt{n} - 2,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{n-1}\frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2\sqrt{n-1} - 2\sqrt{0} = 2\sqrt{n-1}.$$

Ainsi :

$$2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n-1}.$$

Par conséquent,

$$2-\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{1-\frac{1}{n}}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} 2-\frac{2}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{1-\frac{1}{n}} = 2,$$

donc par le théorème d'encadrement, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2,$$

soit encore :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt.$$

On vient de montrer que $\boxed{\varphi \in \mathscr{D}_{0,1}.}$

4 ▷ On note $\widetilde{h}$ la restriction de la fonction h à l'intervalle $]0, \frac{1}{2}]$. Vérifier que la fonction $\widetilde{h}$ est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$, puis montrer que la fonction $\widetilde{h}$ appartient à $\mathscr{D}_{0,\frac{1}{2}}$.

☞ Réponse

Pour tout $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $\widetilde{h}(t) = t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}$. La fonction $\widetilde{h}$ est par dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par produit de fonctions dérivables et pour tout $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}'(t) &= -\frac{1}{2}t^{-3/2}(1-t)^{-1/2} + \frac{1}{2}t^{-1/2}(1-t)^{-3/2} \\
&= -\frac{1}{2}\,t^{-3/2}\,(1-t)^{-3/2}\,[(1-t)-t] \\
&= -\frac{1}{2}\,t^{-3/2}\,(1-t)^{-3/2}\,\underbrace{(1-2t)}_{\geq 0} \leq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{La fonction } \widetilde{h} \text{ est décroissante sur } \left]0, \tfrac{1}{2}\right[.}$

Montrons que $\widetilde{h} \in \mathscr{D}_{0,\frac{1}{2}}$. La fonction $\widetilde{h}$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et on a :

$$\widetilde{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$$

Or d'après la question 3, la fonction φ est intégrable sur $]0,1]$ donc a fortiori sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que la fonction $\widetilde{h}$ est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.
Pour montrer le dernier point, faisons une comparaison série-intégrale : Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\widetilde{h}$ est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, on a : Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\int_{\frac{k}{2n}}^{\frac{k+1}{2n}} \widetilde{h}(t)\,dt \leq \frac{1}{2n}\widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{2n}}^{\frac{k}{2n}} \widetilde{h}(t)\,dt,$$

donc en sommant ces inégalités pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{2n}}^{\frac{k+1}{2n}} \widetilde{h}(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} \widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k-1}{2n}}^{\frac{k}{2n}} \widetilde{h}(t)\, dt,$$

et par la relation de Chasles :

$$\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} \widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) \leq \int_{0}^{\frac{n-1}{2n}} \widetilde{h}(t)\, dt.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$ donc, comme $\widetilde{h}$ est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{\frac{n-1}{2n}} \widetilde{h}(t)\, dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\, dt.$$

Par le théorème d'encadrement, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} \widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\, dt,$$

soit encore :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_{0}^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\, dt.$$

On vient de montrer que $\boxed{\widetilde{h} \in \mathscr{D}_{0,\frac{1}{2}}.}$

5 ▷ Montrer que la fonction h est intégrable sur $]0, 1[$, et que :

$$\int_0^1 h(t)\, dt = 2 \int_0^{1/2} \widetilde{h}(t)\, dt.$$

☞ Réponse

La fonction h est continue sur $]0, 1[$ et on a vu à la question précédente qu'elle est intégrable au voisinage de 0. Montrons l'intégrabilité au voisinage de 1 :

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{(1-t)}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

La fonction $t \mapsto 1-t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0, 1[$, on peut donc appliquer le théorème de changement de variable en posant $u = 1-t$ qui nous donne que les intégrales suivantes sont de même nature :

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_0^{1/2} \varphi(u) du.$$

Or, d'après la question 3, l'intégrale de droite est convergente donc on en déduit que l'intégrale de gauche aussi donc la fonction h est intégrable au voisinage de 1.
Ainsi, on a montré que $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est intégrable sur }]0, 1[.}$

Par la relation de Chasles, on a :

$$\int_0^1 h(t)\, dt = \int_0^{1/2} h(t)\, dt + \int_{1/2}^{1} h(t)\, dt.$$

Comme pour tout $t \in]0,1[$, on a $h(1-t) = h(t)$, on applique le théorème de changement de variable sur la deuxième intégrale en posant $u = 1-t$:

$$\int_{1/2}^{1} h(t)\,dt = \int_0^{1/2} h(1-u)\,du = \int_0^{1/2} h(u)\,du.$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_0^1 h(t)\,dt = \int_0^{1/2} h(t)\,dt + \int_0^{1/2} h(u)\,du = 2\int_0^{1/2} h(t)\,dt.$$

Or, $\widetilde{h}$ est par définition la restriction de la fonction h à l'intervalle $]0,\frac{1}{2}]$ donc les fonctions h et $\widetilde{h}$ coincident sur $]0,\frac{1}{2}]$, d'où :

$$\boxed{\int_0^1 h(t)\,dt = 2\int_0^{1/2} \widetilde{h}(t)\,dt.}$$

6 ▷ Prouver alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \int_0^1 h(t)\,dt.$$

☞ Réponse

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. La relation de Chasles nous permet de découper la somme en deux :

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) + \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right).$$

On s'occupe de la somme de droite : Comme vu à la question précédente, pour tout $t \in]0,1[$, $h(1-t) = h(t)$ d'où

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(1 - \frac{k}{2n}\right) = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{2n-k}{2n}\right).$$

Avec le changement d'indice $\ell = 2n-k$ dans la somme ($k \in [\![n, 2n-1]\!] \iff \ell \in [\![1, n]\!]$) on a :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{2n-k}{2n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2n} h\left(\frac{\ell}{2n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{\ell}{2n}\right) + \frac{1}{2n} h\left(\frac{1}{2}\right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{\ell}{2n}\right) + \frac{1}{2n} h\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) + \frac{1}{2n} h\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

D'une part,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} h\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

D'autre part, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{k}{2n} \in]0, \frac{1}{2}[$, donc par définition $h\left(\frac{k}{2n}\right) = \widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right)$.
Par la question 4, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\, dt,$$

et la question 5 permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \int_0^1 h(t)\, dt.}$$

7 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\, dt.$$

En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^1 h(t)\, dt.$$

☞ **Réponse**

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Pour déterminer la première limite, on effectue une comparaison série-intégrale (la fonction h est décroissante et intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$) :
Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\int_{\frac{k}{2n+1}}^{\frac{k+1}{2n+1}} h(t)\, dt \leq \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{2n+1}}^{\frac{k}{2n+1}} h(t)\, dt,$$

donc en sommant ces inégalités pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{2n+1}}^{\frac{k+1}{2n+1}} h(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k-1}{2n+1}}^{\frac{k}{2n+1}} h(t)\, dt,$$

et par la relation de Chasles :

$$\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{n}{2n+1}} h(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leq \int_0^{\frac{n-1}{2n+1}} h(t)\, dt.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$ donc, comme h est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{n}{2n+1}} h(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{n-1}{2n+1}} h(t)\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\, dt.$$

Par le théorème d'encadrement, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\, dt.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{n}{2n+1}\right),$$

et h est continue sur $]0,1[$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{n}{2n+1}\right) = 0 \times h\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\, dt.}$$

Pour déterminer la deuxième limite, on procède de manière analogue à la question précédente :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right).$$

Par la relation de symétrie vérifiée par h (pour tout $t \in]0,1[$, $h(1-t) = h(t)$), on a

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(1 - \frac{k}{2n+1}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{2n+1-k}{2n+1}\right).$$

Avec le changement d'indice $\ell = 2n+1-k$ dans la somme, on trouve :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{2n+1-k}{2n+1}\right) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{\ell}{2n+1}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{\ell}{2n+1}\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right).\end{aligned}$$

En utilisant la première partie de la question, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\, dt.$$

Or les fonctions h et $\widetilde{h}$ coincident sur $]0, \frac{1}{2}]$ donc

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\, dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\, dt.$$

D'après la question 5, on a

$$2\int_0^{1/2} \widetilde{h}(t)\, dt = \int_0^1 h(t)\, dt.$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n+1}h\left(\frac{k}{2n+1}\right)=\int_0^1 h(t)\,dt.}$$

8 ▷ Déduire des questions précédentes que la fonction h appartient à $\mathscr{D}_{0,1}$.

☞ Réponse

Tout d'abord, d'après la question 5, h est continue et intégrable sur $]0,1[$.
Ensuite, pour tout $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$, on pose

$$S_n := \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}h\left(\frac{k}{n}\right).$$

La question 6 montre que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \int_0^1 h(t)\,dt.$$

La question 7 montre que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \int_0^1 h(t)\,dt.$$

Autrement dit, la suite des termes pairs et la suite des termes impairs de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$ convergent vers la même limite, on en déduit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 h(t)\,dt.$$

Cela signifie donc que $\boxed{\text{la fonction } h \text{ appartient à } \mathscr{D}_{0,1}.}$

9 ▷ Montrer que :

$$\int_0^1 h(t)\,dt = \pi.$$

☞ Réponse

On souhaite effectuer le changement de variable trigonométrique $t=\sin^2(\theta)$ (ce qui revient à écrire $\theta=\arcsin(\sqrt{t})$) : La fonction $t\mapsto \arcsin(\sqrt{t})$ est bien défini et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, strictement croissante et bijective de $]0,1[$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$, de réciproque $\theta\mapsto\sin^2(\theta)$. On peut donc bien effectuer ce changement de variable et obtenir :

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(t)\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\sin^2(\theta))\,2\sin(\theta)\,\cos(\theta)\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\theta)(1-\sin^2(\theta))}}\,2\sin(\theta)\,\cos(\theta)\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\theta)\,\cos^2(\theta)}}\,2\sin(\theta)\,\cos(\theta)\,d\theta.\end{aligned}$$

Comme $\sin \geq 0$ et $\cos \geq 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(t)\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(\theta)\,\cos(\theta)}\, 2\,\sin(\theta)\,\cos(\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\theta.\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\boxed{\int_0^1 h(t)\,dt = \pi.}$$

10 ▷ Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a un équivalent de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n},$$

où la constante λ est à préciser.

☞ Réponse

On a vu à la question 3 que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2.$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2,$$

ou encore,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.}$$

11 ▷ En déduire la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}$$

☞ Réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 \frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right).$$

D'après les questions 8 et 9, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 h(t)\,dt = \pi.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = \pi.}$$

On considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement supérieurs à -1, convergente de limite nulle.

12 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = 0.$$

☞ Réponse

Soit $\widetilde{\varepsilon} > 0$.

D'après la question précédente, $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$ est une suite convergente donc bornée : il existe $M_1 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $0 \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \leq M_1$.

Pour la même raison, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée : il existe $M_2 \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\varepsilon_n| \leq M_2$. De plus elle converge vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $|\varepsilon_n| \leq \dfrac{\widetilde{\varepsilon}}{2\,M_1}$.

Pour tout $n \geq N+1$, on découpe comme suit :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=N}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}.$$

Pour la deuxième somme, on a :

$$0 \leq \sum_{i=N}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leq \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2\,M_1}\sum_{i=N}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \leq \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2\,M_1}M_1 = \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2}.$$

Pour la première somme, pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$, on a $i \geq 1$ et $n - i \geq n - N + 1$ donc $i(n-i) \geq n - N + 1$, d'où la majoration :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leq \sum_{i=1}^{N-1} \frac{M_2}{\sqrt{n-N+1}} = \frac{M_2(N-1)}{\sqrt{n-N+1}}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{M_2(N-1)}{\sqrt{n-N+1}} = 0$, il existe $\widetilde{N} > N$ tel que pour tout $n \geq \widetilde{N}$,

$$\frac{M_2(N-1)}{\sqrt{n-N+1}} \leq \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2},$$

d'où pour tout $n \geq \widetilde{N}$,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{N-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leq \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq \widetilde{N}$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}\right| \leq \widetilde{\varepsilon}.$$

En résumé, on a démontré l'assertion suivante :

$$\forall \widetilde{\varepsilon} > 0, \quad \exists \widetilde{N} \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \quad \forall n \geq \widetilde{N}, \quad \left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}\right| \leq \widetilde{\varepsilon}.$$

Ce qui signifie :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = 0.}$$

13 ▷ En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1\right) = 0.$$

☞ **Réponse**

Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on développe

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left(\frac{1+\varepsilon_{n-i}+\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i}\,\varepsilon_i}{1+\varepsilon_n} - 1\right),$$

et on regroupe sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1\right) = \left(\frac{1}{1+\varepsilon_n} - 1\right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}$$
$$+ \frac{1}{1+\varepsilon_n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}\,\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}}\right).$$

Etudions chaque terme :
Concernant le premier terme, on utilise la question 11 pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\varepsilon_n} - 1\right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = 0 \times \pi = 0.$$

Concernant le second terme, on s'intéresse à chaque somme :

Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on effectue un changement d'indice $j = n - i$ dans la première somme pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j(n-j)}}.$$

Pour la dernière somme, la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente donc bornée : il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\varepsilon_n| \leq M$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on a par inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}\, \varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} \right| \leq M \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on obtient par inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}\, \varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} \right| \leq (2+M) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}.$$

Or, la question précédente montre que la majoration tend vers 0 donc par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}\, \varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} \right) = 0.$$

Comme

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+\varepsilon_n} = 1,$$

on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+\varepsilon_n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}\, \varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} \right) = 0.$$

En conclusion, on a montré :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1 \right) = 0.}$$

2 Une étude de marche aléatoire

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n : \Omega \to \{-1, 1\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{-1, 1\}$,ces variables aléatoires étant mutuellement indépendantes et centrées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

14 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\frac{1+X_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

☞ **Réponse**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, la variable aléatoire X_n est centrée, c'est-à-dire qu'on a $\mathbb{E}(X_n) = 0$. Comme X_n est une variable aléatoire discrète (à valeurs dans $\{-1, 1\}$), on a

$$0 = \mathbb{E}(X_n) = \sum_{x \in X_n(\Omega)} x\mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = -1),$$

donc

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1).$$

De plus, $\{X_n = 1\}$ et $\{X_n = -1\}$ forment un système complet d'évènements (puisque X_n est à valeurs dans $\{-1, 1\}$) donc :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = -1) = 1,$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 1) = 1,$$

d'où :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} \left(= \mathbb{P}(X_n = -1)\right).$$

Comme X_n est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-1, 1\}$, $\frac{1+X_n}{2}$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{0, 1\}$, et on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{1+X_n}{2} = 1\right) = \mathbb{P}\left(1 + X_n = 2\right) = \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = \frac{1}{2}.$$

On a aussi :

$$\mathbb{P}\left(\frac{1+X_n}{2} = 0\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{1+X_n}{2} = 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, on vient de montrer que

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } \frac{1+X_n}{2} \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.}$$

Dans la suite, on fixe l'entier $n \geq 1$. On appelle **chemin**, tout $2n$-uplet $\gamma = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2n})$ dont les composantes ε_k valent -1 ou 1.

Si $\gamma = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2n})$ est un chemin, on appelle **indice d'égalité**, tout entier $k \in \{1, \cdots, 2n\}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 0.$$

On remarquera alors qu'un entier k est un indice d'égalité si et seulement si le k-uplet $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ comporte autant de composantes égales à 1 que de composantes égales à -1.

On note $N_n : \Omega \to \mathbb{N}$ la variable aléatoire qui à tout élément ω de l'univers Ω compte le nombre d'indices d'égalité du chemin $(X_1(\omega), \ldots, X_{2n}(\omega))$.

On note pour tout entier i entre 1 et n, l'événement A_i défini par

$$A_i = \{\omega, 2i \text{ est un indice d'égalité de } (X_1(\omega), \ldots, X_{2n}(\omega))\}$$

15 ▷ Calculer la probabilité $\mathbb{P}(A_i)$, pour tout entier i entre 1 et n.

☞ Réponse

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Pour $\omega \in \Omega$, $\omega \in A_i$ si, et seulement si, $2i$ est un indice d'égalité de $(X_1(\omega), \ldots, X_{2n}(\omega))$ si, et seulement si, $\sum_{k=1}^{2i} X_k(\omega) = 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons $Y_k := \dfrac{1 + X_n}{2}$. On a :

$$\sum_{k=1}^{2i} Y_k = \sum_{k=1}^{2i} \frac{1 + X_n}{2} = i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2i} X_k.$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{2i} X_k(\omega) = 0$ si, et seulement si, $\sum_{k=1}^{2i} Y_k(\omega) = i$ donc $A_i = \left\{\sum_{k=1}^{2i} Y_k = i\right\}$.
Or, par hypothèse, les variables $X_1, \ldots, X_{2i}$ sont mutuellement indépendantes, on en déduit d'après le lemme des coalitions, que les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_{2i}$ sont mutuellement indépendantes. d'après la question précédente, chaque Y_k est de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, la variable aléatoire $Y_1 + \cdots + Y_{2i}$ suit une loi binomiale de paramètres $2i$ et $\frac{1}{2}$.
Il vient alors :

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{2i} Y_k = i\right) = \binom{2i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{2i-i} = \binom{2i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = \binom{2i}{i} \frac{1}{4^i}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{Pour tout entier } i \text{ entre } 1 \text{ et } n,\ \mathbb{P}(A_i) = \binom{2i}{i} \frac{1}{4^i}.}$$

16 ▷ Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ un entier et $n \geq 1$ un autre entier. En distinguant le cas où l'entier $\ell - n$ est pair ou impair, calculer $\mathbb{P}(S_n = \ell)$.

☞ Réponse

Comme ci-dessus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_k := \dfrac{1 + X_n}{2}$. On a également :

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + X_n}{2} = \frac{1}{2}\left(n + \sum_{k=1}^{n} X_k\right).$$

Ainsi,

$$S_n = \ell \iff \sum_{k=1}^{n} X_k = \ell \iff \sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{n + \ell}{2}.$$

D'après la question 14, $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Or,

$$\frac{n + \ell}{2} \in [\![0, n]\!] \Longrightarrow n + \ell \in [\![0, 2n]\!] \iff \ell \in [\![-n, n]\!].$$

Ainsi, si $\ell < -n$ ou $\ell > n$ alors $\{S_n = \ell\} = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(S_n = \ell) = 0$.

Supposons désormais $\ell \in [\![-n, n]\!]$ et distinguons deux cas :
• Supposons $\ell - n$ est impair : En écrivant

$$\frac{n + \ell}{2} = \frac{n - \ell + 2\ell}{2} = -\frac{\ell - n}{2} + \ell,$$

comme $\sum_{k=1}^{n} Y_k \in [\![0,n]\!]$, cela force $\dfrac{\ell-n}{2}$ a être un entier, c'est-à-dire $\ell-n$ est pair, ce qui est impossible. Dans ce cas, $\{S_n=\ell\}=\emptyset$ donc $\mathbb{P}(S_n=\ell)=0$.

• Supposons $\ell-n$ est pair : On a $\dfrac{n+\ell}{2}\in[\![0,n]\!]$ et on a vu à la question précédente que $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$P(S_n=\ell)=\binom{n}{\frac{n+\ell}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+\ell}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{n+\ell}{2}}=\binom{n}{\frac{n+\ell}{2}}\frac{1}{2^n}$$

Remarquons que cette égalité reste valable même si $\ell<-n$ ou $\ell>n$ puisque dans ce cas $\frac{n+\ell}{2}\notin[\![0,n]\!]$ donc le coefficient binomial est alors nul.

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbb{P}(S_n=\ell)=0 \text{ si } \ell-n \text{ est impair,}\\ \mathbb{P}(S_n=\ell)=\dbinom{n}{\frac{n+\ell}{2}}\dfrac{1}{2^n} \text{ si } \ell-n \text{ est pair.}\end{array}}$$

On admet sans démonstration le résultat suivant :

Théorème 1 — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels non nuls telles que $a_n=o(b_n)$, au voisinage de $+\infty$, et la série $\sum_n |b_n|$ est divergente. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = o\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|\right) \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

17 ▷ Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs telles que : $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n$, et la série $\sum_n c_n$ diverge.
En utilisant le résultat admis dans l'énoncé, montrer que la série $\sum_n d_n$ est divergente et que :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

☞ Réponse

Par hypothèse, $d_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c_n$ donc $d_n \underset{n\to+\infty}{=} c_n+o(c_n)$ ou encore $d_n-c_n \underset{n\to+\infty}{=} o(c_n)$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $c_n>0$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|c_n|$ diverge.

Supposons en plus que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, d_n-c_n est un nombre réel non nul. [a]
Les hypothèses du théorème admis sont vérifiée. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n}(d_k-c_k) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=1}^{n}|c_k|\right).$$

Par linéarité de la somme (finie), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} d_k \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=1}^{n} c_k + o\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right).$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

a. Voir la remarque qui suit sur les hypothèses du théorème 1

☞ Remarque concernant le théorème 1

L'hypothèse "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres réels non nuls" est superflu : Le théorème est valable pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels quelconque.
Voici la preuve :

Soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ d'où $|a_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}|b_n|$. Par inégalité triangulaire, on a : Pour tout $n \geq N+1$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \\
&= \sum_{k=1}^{N} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{n} |b_k| \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(|a_k| - \frac{\varepsilon}{2}|b_k|\right) + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n} |b_k|
\end{aligned}$$

Comme la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |b_n|$ est divergente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n} |b_k| = +\infty.$$

Remarquons que $\sum_{k=1}^{N} \left(|a_k| - \frac{\varepsilon}{2}|b_k|\right)$ est fixé (indépendant de n). Ainsi, il existe un entier $N_1 > N$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(|a_k| - \frac{\varepsilon}{2}|b_k|\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n} |b_k|$.
On en déduit que pour tout $n \geq N_1$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n} |b_k| + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n} |b_k| = \varepsilon\sum_{k=1}^{n} |b_k|.$$

Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres réels non nuls, on a :

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} |b_k|}\right| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|\right).$$

18 ▷ Montrer que la variable aléatoire N_n admet une espérance finie et que son espérance $\mathbb{E}(N_n)$ est égale à :

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}.$$

[indication : on pourra exprimer la variable N_n à l'aide de fonctions indicatrices associées aux événements A_i].

☞ **Réponse**

Rappelons que $N_n : \Omega \to \mathbb{N}$ est la variable aléatoire qui compte le nombre d'indices d'égalité du chemin $(X_1, \ldots, X_{2n})$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, A_i désigne l'événement " $2i$ est un indice d'égalité de $(X_1, \ldots, X_{2n})$ ".
Or, les indices d'égalité ne peuvent être que des entiers pairs. Ainsi, en notant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{1}_{A_i}$ la fonction indicatrice de l'événement A_i (la fonction vaut 1 si l'événement A_i est réalisé et 0 s'il n'est pas réalisé), on a :

$$N_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire $\mathbf{1}_{A_i}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et on a

$$\mathbf{1}_{A_i}(\omega) = 1 \iff \omega \in A_i$$

donc $\{\mathbf{1}_{A_i} = 1\} = A_i$.
Ainsi, la variable aléatoire $\mathbf{1}_{A_i}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A_i)$. Elle admet donc une espérance finie égale à $\mathbb{P}(A_i)$. Par conséquent, la variable aléatoire N_n admet une espérance finie comme somme finie de variable aléatoire d'espérance finie et on a, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(N_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

D'après la question 15, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) = \binom{2i}{i}\frac{1}{4^i}$ donc on en déduit :

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } N_n \text{ admet une espérance finie et on a } \mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}.}$$

19 ▷ En déduire l'équivalent :

$$\mathbb{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

☞ **Réponse**

Par définition du coefficient binomial, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\binom{2i}{i}}{4^i} = \frac{1}{4^i}\frac{(2i)!}{(i!)^2}.$$

En utilisant l'équivalent de Stirling (admis au début du sujet), on a :

$$\frac{1}{4^i}\frac{(2i)!}{(i!)^2} \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4^i}\frac{\left(\frac{2i}{e}\right)^{2i}\sqrt{4\pi i}}{\left(\left(\frac{i}{e}\right)^i\sqrt{2\pi i}\right)^2} = \frac{1}{4^i}\frac{2^{2i}\left(\frac{i}{e}\right)^{2i}2\sqrt{\pi i}}{\left(\frac{i}{e}\right)^{2i}2\left(\sqrt{\pi i}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi i}}.$$

Ainsi,

$$\frac{\binom{2i}{i}}{4^i} \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{i}}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{i}}$ est une série de Riemann divergente. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série

$$\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\frac{\binom{2i}{i}}{4^i}.$$

est également divergente. D'après la question 17, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{2i}{i}}{4^i} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}},$$

d'où, d'après la question 18 :

$$\mathbb{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}.$$

D'après la question 10, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n},$$

et par transitivité de la relation d'équivalence, on trouve :

$$\boxed{\mathbb{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.}$$

Remarque : Rappelons que $N_n : \Omega \to \mathbb{N}$ est la variable aléatoire qui compte le nombre d'indices d'égalité du chemin $(X_1, \ldots, X_{2n})$; autrement dit, le nombre de fois où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ passe par 0.

Dans la question 14, on a vu que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, en partant de $S_0 = 0$, à chaque instant, il est possible de faire $+1$ ou -1 avec une égale probabilité. Cela décrit ce que l'on appelle une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Le résultat établi à cette question montre que si on fait tendre le nombre d'instants n vers l'infini, la moyenne du nombre de passage de S_n par 0 tend vers l'infini donc la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ repasse par l'origine une infinité de fois.

Ce résultat reste valable si on considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ (ce qui signifie qu'on se place dans le plan et qu'à chaque instant on peut se déplacer vers la gauche, ou vers la droite, ou vers le haut ou vers le bas avec même probabilité).
On peut généraliser la notion de marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$. Cependant, on peut montrer que ce n'est plus vrai lorsqu'on considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geq 3$.

Dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires, on procède à des tirages de boules sans remise, jusqu'à vider complètement l'urne. Les tirages sont équiprobables à chaque pioche.

Pour tout entier k entre 1 et $2n$, on dit que l'entier k est un **indice d'égalité** si dans l'expérience de pioche précédemment décrite, il reste autant de boules noires que de boules blanches dans l'urne après avoir pioché les k premières boules sans remise. On remarque que l'entier $2n$ est toujours un indice d'égalité.

On note M_n la variable aléatoire comptant le nombre aléatoire d'indices d'égalité k entre 1 et $2n$.

20 ▷ En utilisant par exemple les événements B_i : « l'entier i est un indice d'égalité », montrer que la variable M_n admet une espérance finie égale à :

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i}\binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}}$$

☞ Réponse

Comme nous le suggère l'énoncé, on s'intéresse aux événements B_i : « l'entier i est un indice d'égalité » ($i \in [\![1, 2n]\!]$).

Le même raisonnement de la question 18 nous donne :

$$M_n = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{1}_{B_i}.$$

Or, les nombres impairs ne peuvent pas être des indices d'égalité, d'où

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{B_{2i}},$$

ou encore

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_{2i}).$$

Fixons $i \in [\![1, n]\!]$.
On procède à des tirages de boules sans remise : On tire $2i$ boules succesives sans

remise donc on a un $2i$-arrangement dans l'ensemble de toutes les boules de l'urne soit $2n$ éléments. Autrement dit, le nombre total de possibilités est $\dfrac{(2n)!}{(2n-2i)!}$.

Pour toutes ces possibilités, on s'intéresse à celles qui réalisent B_{2i}, c'est-à-dire qu'on a tiré i boules blanches et i boules noires.
Pour avoir le nombre de possibilités de cette configuration, on doit :

1) Premièrement, avoir i boules blanches parmi les $2i$ boules (ce qui nous donnera au passage i boules noires). Il y a $\dbinom{2i}{i}$ choix.
2) Deuxièmement, pour ces i boules blanches, il y a le i-arrangement des n boules blanches, soit $\dfrac{n!}{(n-i)!}$ choix.
3) Troisièmement, on fait de même pour les autres i boules noires. On a un i-arrangement des n boules noires, soit $\dfrac{n!}{(n-i)!}$ choix.

Par le principe multiplicatif, on obtient

$$\text{Card}(B_{2i}) = \binom{2i}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{(n-i)!}.$$

Comme tous les tirages sont équiprobables, on peut calculer la probabilité de l'évènement B_{2i} :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{2i}) &= \frac{\dbinom{2i}{i}\dfrac{n!}{(n-i)!}\dfrac{n!}{(n-i)!}}{\dfrac{(2n)!}{(2n-2i)!}}\\
&= \binom{2i}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{(2n-2i)!}{(2n)!}\\
&= \frac{\dbinom{2i}{i}\dfrac{(2n-2i)!}{(n-i)!\,((2n-2i)-(n-i))!}}{\dfrac{(2n)!}{n!n!}}\\
&= \frac{\dbinom{2i}{i}\dbinom{2n-2i}{n-i}}{\dbinom{2n}{n}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\dbinom{2i}{i}\dbinom{2n-2i}{n-i}}{\dbinom{2n}{n}}.$$

Remarquons que le dernier terme de cette somme ($i = n$) vaut

$$\frac{\binom{2n}{n}\binom{2n-2n}{n-n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n}} = 1.$$

Pour $i = 0$, on a :

$$\frac{\binom{2\times 0}{0}\binom{2n-2\times 0}{n-0}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n}} = 1.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}(M_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i}\binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}}.}$$

21 ▷ En déduire l'équivalent :

$$\mathbb{E}(M_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi\, n},$$

☞ Réponse

On a montré au début de la question 19 :

$$\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi\, k}},$$

d'où :

$$\binom{2k}{k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{4^k}{\sqrt{\pi\, k}}.$$

Par définition de l'équivalence,

$$\binom{2k}{k} \underset{k\to+\infty}{=} \frac{4^k}{\sqrt{\pi\, k}} + o\left(\frac{4^k}{\sqrt{\pi\, k}}\right).$$

Par définition de la négligeabilité, il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de limite nulle telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{2k}{k} = \frac{4^k}{\sqrt{\pi\, k}} + \frac{4^k}{\sqrt{\pi\, k}}\varepsilon_k = \frac{4^k}{\sqrt{\pi\, k}}(1+\varepsilon_k).$$

A noter que $1+\varepsilon_k > 0$ car le coefficient binomial, ainsi le numérateur et dénominateur sont tous strictement positifs d'où $\varepsilon_k > -1$.

Par la question 20, on a pour tout $n \geq 2$,

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i}\binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i}\binom{2\,(n-i)}{n-i}}{\binom{2n}{n}}.$$

D'après ce qui a été fait au début de cette question, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n) &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\dfrac{4^i}{\sqrt{\pi i}}(1+\varepsilon_i)\dfrac{4^{n-i}}{\sqrt{\pi(n-i)}}(1+\varepsilon_{n-i})}{\dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}(1+\varepsilon_n)} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{\pi i}\,\sqrt{\pi(n-i)}} \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} \\
&= 1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n}.
\end{aligned}$$

La question 13 nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \right) = 0,$$

et la question 11 nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = \pi,$$

donc on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} = \pi.$$

Par conséquent,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi\, n},$$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\, n}} = 0$ donc $1 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi\, n}}\right)$, d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n) &= 1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\, n}}\right) + \sqrt{\pi\, n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\, n}}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\pi\, n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\, n}}\right).
\end{aligned}$$

Par définition de la relation d'équivalence, on obtient bien :

$$\boxed{\mathbb{E}(M_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi\, n}.}$$

Fin du problème.