Proposition de corrigé

—

Concours Commun Mines-Ponts

Sujet 1 Mathématiques 2024, filière PC/PSI

Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Si vous repérez une coquille, une erreur, ou si vous avez une question ou une suggestion, n'hésitez pas à me contacter !

Notations et résultats admis

— Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

— Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on pose $C^k(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

— On note $CL(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à croissance lente, c'est-à-dire :
$$CL(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \exists C > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq C(1 + |x|^k) \right\}.$$

— On note :
$$L^1(\varphi) = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}) \;\middle|\; f\varphi \text{ intégrable sur } \mathbb{R} \right\}.$$

— Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit — si cela est possible — la fonction $P_t(f)$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right) \varphi(y)\, dy.$$

— Pour f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $L(f)$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L(f)(x) = f''(x) - xf'(x).$$

— Une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite fonction polynomiale en $|x|$ s'il existe $d \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, \ldots, a_d$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k.$$

— Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On admet que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ si, et seulement si, pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} f(t_n) = \ell.$$

Partie 1 : Résultats préliminaires

1 ▷ Montrer que toute fonction majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ est à croissance lente.

☞ Réponse

Montrons d'abord qu'une fonction polynomiale en $|x|$ est à croissance lente.

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale en $|x|$. Supposons que P n'est pas la fonction polynomiale nulle (sinon, il est clair que la fonction polynomiale nulle est à croissance lente). Il existe alors $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k.$$

Distinguons deux cas :
- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq 1$. On a par l'inégalité triangulaire :

$$|P(x)| = \left|\sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k\right| \leq \sum_{k=0}^{d} |a_k||x|^k \leq \sum_{k=0}^{d} |a_k|.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 1$. Par récurrence, on observe que pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, on a $|x|^k \leq |x|^{k+1}$ et, par conséquent, $|x|^k \leq |x|^d$. Par l'inégalité triangulaire :

$$|P(x)| = \left|\sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k\right| \leq \sum_{k=0}^{d} |a_k||x|^k \leq \left(\sum_{k=0}^{d} |a_k|\right) |x|^d.$$

Notons $C = \sum_{k=0}^{d} |a_k| > 0$ de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |P(x)| \leq C(1 + |x|^d).$$

Ainsi, P est à croissance lente.

Maintenant, si f est une fonction majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale P en $|x|$ alors $|f| \leq |P|$ et, par domination, f est également à croissance lente.

On en déduit :

$\boxed{\text{Toute fonction majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en } |x| \text{ est à croissance lente.}}$

2 ▷ Montrer que $C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R}) \subset L^1(\varphi)$.

☞ **Réponse**

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. Montrons que $f\varphi$ est intégrable.
Comme la fonction φ étant continue, on a $f\varphi$ continue par produit de fonctions continues. En particulier, $f\varphi$ est intégrable sur ton compact.

Il nous reste à étudier l'intégrabilité aux bornes $\pm\infty$.
Par hypothèse, il existe $C \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|^k),$$

d'où

$$|f(x)\varphi(x)| \leq C(1 + |x|^k)\,\varphi(x).$$

On a par croissance comparée :

$$\lim_{|x| \to +\infty} x^2 e^{-x^2/2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{|x| \to +\infty} |x|^{k+2} e^{-x^2/2} = 0.$$

Par somme, on obtient

$$\lim_{|x| \to +\infty} x^2\, C(1 + |x|^k)\varphi(x) = 0,$$

ce qui s'écrit :

$$C(1 + |x|^k)\varphi(x) \underset{|x| \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par majoration, on a également :

$$f(x)\varphi(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ et en $-\infty$ (intégrale de Riemann) donc :

$$f\varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

Autrement dit,

$$f \in L^1(\varphi).$$

On vient de démontrer l'inclusion $\boxed{C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R}) \subset L^1(\varphi).}$

On admet dans toute la suite du problème que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 1.$

3 ▷ Montrer que $CL(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Montrer aussi que $CL(\mathbb{R})$ est stable par produit.

☞ Réponse

Pour établir que $CL(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, on va montrer $CL(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R}$.

- La fonction nulle appartient à $CL(\mathbb{R})$.
- Soient $f_1, f_2 \in CL(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
  Il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+$ et $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$|f_1(x)| \leq C_1(1+|x|^{k_1}) \quad \text{et} \quad |f_2(x)| \leq C_2(1+|x|^{k_2}).$$
  Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$|\alpha f_1(x) + f_2(x)| \leq |\alpha||f_1(x)| + |f_2(x)| \leq |\alpha|C_1(1+|x|^{k_1}) + C_2(1+|x|^{k_2})$$
  Comme $\alpha f_1 + f_2$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$, la question 1 affirme que :
  $$\alpha f_1 + f_2 \in CL(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $CL(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\boxed{CL(\mathbb{R}) \text{ est un espace vectoriel.}}$

Montrons maintenant que $CL(\mathbb{R})$ est stable par produit : Soient $f_1, f_2 \in CL(\mathbb{R})$. En gardant les mêmes constantes C_1, C_2 et k_1, k_2 comme ci-dessus, on a :

$$|f(x)g(x)| \leq C_1C_2(1+|x|^{k_1})(1+|x|^{k_2}).$$

Donc fg est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$, ce qui implique :

$$fg \in CL(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $\boxed{CL(\mathbb{R}) \text{ est stable par produit.}}$

4 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Vérifier que la fonction $P_t(f)$ est bien définie pour $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et vérifier que P_t est linéaire sur $C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$.

☞ Réponse

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. Montrons que la fonction $P_t(f)$ est bien définie.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $t \in \mathbb{R}_+$, $1 - e^{-2t} \geq 0$, la fonction

$$g : y \in \mathbb{R} \mapsto f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)$$

est bien définie.

Montrons que $g \in L^1(\varphi)$:

D'un côté, $g \in C^0(\mathbb{R})$ par composée de fonctions continues (f étant continue).
De l'autre côté, $f \in CL(\mathbb{R})$ donc il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $X \in \mathbb{R}$:

$$|f(X)| \leq C\left(1 + |X|^k\right).$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|g(y)| \leq C\left(1 + \left|e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right|^k\right) \leq C\left(1 + \left(e^{-t}|x| + \sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^k\right).$$

Par conséquent, g est majorée par une fonction polynomiale en $|y|$, donc $g \in CL(\mathbb{R})$.

Enfin, $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ donc, d'après la question 2, $g \in L^1(\varphi)$. Autrement dit, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy$$

est convergente, ce qui montre que $P_t(f)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$\boxed{\text{La fonction } P_t(f) \text{ est bien définie pour } f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})}$.

Remarquons que $C^0(\mathbb{R})$ et $CL(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R}$, leur intersection $C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ est aussi un sous-espace vectoriel, donc c'est un espace vectoriel.
Montrons que P_t est une application linéaire sur $C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$.

Soit $f_1, f_2 \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Par linéarité de l'intégrale : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P_t(\alpha f_1 + f_2)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f_1 + f_2)\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f_1\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy \\
&= \alpha P_t(f_1)(x) + P_t(f_2)(x).
\end{aligned}$$

(Chaque intégrale qui apparaît étant donc convergent d'après ci-dessus.)
Ceci étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$P_t(\alpha f_1 + f_2) = \alpha P_t(f_1) + P_t(f_2).$$

Ainsi, $\boxed{P_t \text{ est linéaire sur } C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})}$.

5 ▹ Montrer que pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to +\infty} P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi(y)\, dy.$$

☞ Réponse

Soient $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $X \in \mathbb{R}$:

$$|f(X)| \leq C\left(1 + |X|^k\right).$$

Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée (dans le cas d'un paramètre continu) :

- **Continuité :** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- **Convergence ponctuelle :** Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

  $$\lim_{t \to +\infty} \left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) = y.$$

  Par continuité de f en y,

  $$\lim_{t \to +\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) = f(y),$$

  d'où :

  $$\lim_{t \to +\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y) = f(y)\varphi(y).$$

- **Domination (indépendante de t) :** Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

  $$e^{-t} \leq 1 \text{ et } 1 - e^{-2t} \leq 1.$$

  Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\begin{aligned}\left|f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\right| &\leq C\left(1 + \left|e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right|^k\right)\varphi(y) \\ &\leq C\left(1 + \left(e^{-t}|x| + \sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^k\right)\varphi(y) \\ &\leq C\left(1 + (|x|+|y|)^k\right)\varphi(y)\end{aligned}$$

  La fonction $P : y \in \mathbb{R} \mapsto C(1 + (|x|+|y|)^k)$ est une fonction polynomiale en $|y|$ donc à croissance lente (d'après la question 1). Comme P est également continue, $P \in L^1(\varphi)$ (d'après la question 2). Ainsi, cela signifie que la fonction (indépendante de t) $y \mapsto C(1 + (|x|+|y|)^k)\varphi(y)$ est intégrable.

Par le théorème de convergence dominée, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} P_t(f)(x) &= \lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(y)\,dy.\end{aligned}$$

Pour tout $f\in C^0(\mathbb{R})\cap CL(\mathbb{R})$ et tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to+\infty} P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi(y)\,dy.$$

6 ▷ Soit $t\in\mathbb{R}_+$. Montrer que si $f\in C^0(\mathbb{R})\cap CL(\mathbb{R})$, alors $P_t(f)\in C^0(\mathbb{R})$. Montrer aussi que $P_t(f)$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ indépendante de t. En déduire que $P_t(f)\in L^1(\varphi)$.

☞ Réponse

Soit $f\in C^0(\mathbb{R})\cap CL(\mathbb{R})$. Il existe $C\in\mathbb{R}_+$ et $k\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $X\in\mathbb{R}$:

$$|f(X)|\le C\left(1+|X|^k\right).$$

Montrons que $P_t(f)\in C^0(\mathbb{R})$ par le théorème de continuité sous le signe intégral. Vérifions les hypothèses de ce théorème :

- **Continuité par rapport au paramètre :** Pour tout $y\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par continuité de f.
- **Continuité par morceaux par rapport à la variable d'intégration :** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $y\mapsto f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par continuité de f.
- **Domination (indépendante de x) :** Pour tout $M>0$, tout $x\in[-M,M]$ et tout $y\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left|f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\right| &\le C\left(1+\left(e^{-t}|x|+\sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^k\right)\varphi(y)\\ &\le C\left(1+(M+|y|)^k\right)\varphi(y).\end{aligned}$$

  Avec le même argument qu'à la question précédente, la fonction (indépendante de x), $y\mapsto C(1+(M+|y|)^k)\varphi(y)$ est intégrable.

Ainsi, l'application

$$P_t(f) : x\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}|P_t(f)(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\right| dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} C\left(1+(|x|+|y|)^k\right)\varphi(y)\,dy.\end{aligned}$$

On veut écrire cela sous la forme d'un polynôme en $|x|$. On va donc utiliser le binôme de Newton puis la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}|P_t(f)(x)| &\leq C\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|x|^j|y|^{k-j}\right)\varphi(y)dy \\ &\leq C\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,dy + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|x|^j\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^{k-j}\varphi(y)\,dy\right) \\ &\leq C\left(1+\sum_{j=0}^{k}a_j|x|^j\right),\end{aligned}$$

avec $a_j = \binom{k}{j}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^{k-j}\varphi(y)\,dy \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$\boxed{|P_t(f)| \text{ est majorée par une fonction polynomiale en } |x|\text{, indépendante de } t}$.

D'après la question 1, $P_t(f) \in CL(\mathbb{R})$ et on a montré ci-dessus que $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R})$ donc $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et d'après la question 2, $\boxed{P_t(f) \in L^1(\varphi)}$.

On admettra dans toute la suite du problème que, si $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

7 ▷ Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ telles que les fonctions f, f', f'' et g soient à croissance lente, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)\,g(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,g'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

☞ Réponse

Soient $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ telles que les fonctions f, f', f'' et g soient à croissance lente.

Commençons par justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)\,g(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

D'un côté, comme f' et f'' sont à croissance lente et continues, ainsi que la fonction polynomiale $x \mapsto x$, $L(f) : x \mapsto f''(x) - xf'(x)$ est également à croissance lente et continue comme somme et produit de telles fonctions. De plus, g est également continue et à croissance lente donc $L(f)g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et la question 2 montre que $L(f)g \in L^1(\varphi)$. On en déduit la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)\, g(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Remarquons que $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ vérifie $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ donc

$$(L(f)\varphi)(x) = f''(x)\varphi(x) - xf'(x)\varphi(x) = f''(x)\varphi(x) + f'(x)\varphi'(x) = (f'\varphi)'(x).$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)g(x)\varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (f'\varphi)'(x)g(x)\, dx.$$

Comme $f'g \in CL(\mathbb{R})$ par produit de fonctions à croissance lente, il existe $\widetilde{C} \in \mathbb{R}_+$ et $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f'g(x)| \leq \widetilde{C}\left(1 + |x|^{\widetilde{k}}\right).$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f'(x)\varphi(x)g(x)| \leq \frac{\widetilde{C}}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + |x|^{\widetilde{k}}\right) e^{-x^2/2}.$$

Par croissance comparée, on obtient :

$$\lim_{|x| \to +\infty} f'(x)\varphi(x)g(x) = 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f'\varphi)'(x)g(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)g'(x)\, dx$$

sont de même nature (convergente), et :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)g(x)\varphi(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f'\varphi)'(x)g(x)\, dx \\
&= \left[f'(x)\varphi(x)g(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)g'(x)\, dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Remarque : L'égalité est valable sans supposer que f est à croissance lente, et avec un degré de dérivabilité en moins pour g ($g \in C^1(\mathbb{R})$ au lieu de $g \in C^2(\mathbb{R})$).

Partie 2 : Dérivée de $P_t(f)$

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note, si cela a un sens, $\dfrac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}$ la dérivée de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$.

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, on note, si cela a un sens, $P_t(f)'$ (resp. $P_t(f)''$) la dérivée de $x \in \mathbb{R} \mapsto P_t(f)(x)$ (resp. la dérivée seconde de $x \in \mathbb{R} \mapsto P_t(f)(x)$).

8 ▷ Montrer que si $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ telle que $f' \in CL(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que pour tout $t > 0$, on a :

$$\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-xe^{-t} + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right) f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \varphi(y)\, dy.$$

☞ Réponse

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ telle que $f' \in CL(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$.
Il existe $C' \in \mathbb{R}_+$ et $k' \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $X \in \mathbb{R}$:

$$|f'(X)| \leq C'\left(1 + |X|^{k'}\right).$$

Pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose $A(t, y) := f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \varphi(y)$.
On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégral :

- **Intégrabilité :** Pour tout $t > 0$, $y \mapsto A(t, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (c'est la question 4).
- **Régularité :** Comme $t \mapsto \sqrt{1-e^{-2t}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et f et exp sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$, $t \mapsto A(t, y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$$\frac{\partial A(t,y)}{\partial t} = \left(-e^{-t}x + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right) f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \varphi(y).$$
- **Domination (indépendante de t) :** Soit $m > 0$.
Pour tout $(t, y) \in [m, +\infty[\times\mathbb{R}$, on a par inégalité triangulaire :
$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial A(t,y)}{\partial t}\right| &= \left|-e^{-t}x + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right| \left|f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\right| \varphi(y) \\ &\leq \left(e^{-t}|x| + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}|y|\right) C'\left(1 + \left|e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right|^{k'}\right) \varphi(y) \\ &\leq C'\left(|x| + \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2m}}}|y|\right)\left(1 + (|x| + |y|)^{k'}\right) \varphi(y)\end{aligned}$$
Comme $y \mapsto C'\left(|x| + \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2m}}}|y|\right)\left(1 + (|x| + |y|)^{k'}\right)$ est une application polynomiale en $|y|$, elle est à croissance lente (d'après la question 1) et continue donc appartient à $L^1(\varphi)$ (d'après la question 2). Ainsi, l'application $y \mapsto C'\left(|x| + \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2m}}}|y|\right)\left(1 + (|x| + |y|)^{k'}\right) \varphi(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de t.

Le théorème de dérivation s'applique, $t \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-xe^{-t} + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}y}}\right) f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \varphi(y)\, dy.$$

9 ▷ Soient $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Montrer aussi que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_t(f)'(x) = e^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \varphi(y)\, dy.$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_t(f)''(x) = e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \varphi(y)\, dy.$$

☞ Réponse

On va appliquer théorème de dérivation sous le signe intégral (version C^2).
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $B(x, y) := f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \varphi(y)$.

- **Régularité :** Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto B(x, y)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions C^2 sur $\mathbb{R}$ (f est de classe C^2 par hypothèse) et :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial x}(x, y) = e^{-t} f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \varphi(y) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2}(x, y) = e^{-2t} f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \varphi(y). \end{cases}$$

- **Intégrabilité :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les applications $y \mapsto B(x, y)$ et $y \mapsto \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Pour la première, cela vient de la question 4 (car $f' \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$). Pour la deuxième, $f' \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$, on en déduit par la question 4 (en remplaçant f par f') que $y \mapsto f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \varphi(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\left|\frac{\partial B}{\partial x}(x, y)\right| \leq \left|f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\right| \varphi(y)$ donc, par majoration, $\frac{\partial B}{\partial x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- **Domination (indépendante de t) :** Comme $f'' \in CL(\mathbb{R})$, il existe $C'' \in \mathbb{R}_+$ et $k'' \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $X \in \mathbb{R}$:

$$|f''(X)| \leq C''\left(1 + |X|^{k''}\right).$$

Soit $M > 0$. Pour tout $x \in [-M, M]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}(x, y)\right| &= e^{-2t} \left|f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\right| \varphi(y) \\ &\leq C''\left(1 + \left(e^{-t}|x| + \sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^{k''}\right) \varphi(y) \\ &\leq C''\left(1 + (|x| + |y|)^{k''}\right) \varphi(y), \end{aligned}$$

et l'application $y \mapsto C''\left(1+(|x|+|y|)^{k''}\right)\varphi(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (même raisonnement qu'à la question précédente).

Ainsi, $P_t(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} B(x,y)\,dy$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{cases} P_t(f)'(x) = e^{-t}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy \\ P_t(f)''(x) = e^{-2t}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy. \end{cases}}$$

Remarque : Ces deux égalités se réécrivent de façon plus compacte :

$$\begin{cases} P_t(f)'(x) = e^{-t}P_t(f')(x) \\ P_t(f)''(x) = e^{-2t}P_t(f'')(x). \end{cases}$$

10 ▹ En déduire que pour $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = L(P_t(f))(x).$$

☞ Réponse

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente, $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 8 et 9, et par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-xe^{-t}+\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right)f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy \\ &= -xP_t(f)'(x)+\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy. \end{aligned}$$

Comme vu précédemment, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\varphi'(y) = -y\,\varphi(y)$ et :

$$\frac{d}{dy}\left(f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\right) = \sqrt{1-e^{-2t}}\cdot f''\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right).$$

De plus, $f' \in CL(\mathbb{R})$ donc

$$\lim_{|x|\to+\infty} f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y) = 0.$$

On peut donc effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} y\,f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi'(y)\,dy \\ &= \sqrt{1-e^{-2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question 9 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} &= -xP_t(f)'(x) + e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy \\ &= -xP_t(f)'(x) + e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy \\ &= -xP_t(f)'(x) + P_t(f)''(x).\end{aligned}$$

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = L(P_t(f))(x).}$$

Partie 3 : Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Pour $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ à valeurs strictement positives telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = 1,$$

on définit l'entropie de f par rapport à φ par :

$$\mathrm{Ent}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(x))f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Dans la suite de cette partie, f est un élément de $C^2(\mathbb{R})$ à valeurs strictement positives tel que les fonctions f, f', f'' et $\frac{f'^2}{f}$ soient à croissance lente. On suppose aussi que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = 1.$$

11 ▷ Étudier les variations de la fonction $t \mapsto t\ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On vérifiera que l'on peut prolonger par continuité la fonction en 0.

☞ Réponse

Notons pour tout $t > 0$:

$$h(t) = t\ln(t).$$

(On s'en servira dans la suite)
La fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t > 0$:

$$h'(t) = \ln(t) + 1.$$

Ainsi :

$$h'(t) \geq 0 \iff \ln(t) \geq -1 \iff t \geq e^{-1},$$

donc h est décroissante sur $]0, e^{-1}[$ et croissante sur $]e^{-1}, +\infty[$.
De plus, par croissance comparée, on a :

$$\lim_{t \to 0^+} t\ln(t) = 0,$$

donc h est prolongeable par continuité en 0, en posant $h(0) = 0$.
On continuera de noter h la fonction ainsi prolongée sur $[0, +\infty[$.
Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} t\ln(t) = +\infty.$$

Toutes ces informations sont résumées dans le tableau de variations suivant :

t	0		e^{-1}		$+\infty$
Signe de h'	||	$-$	0	$+$	
Variations de h	|| 0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

12 ▷ Justifier que la quantité $\mathrm{Ent}_\varphi(g)$ est bien définie pour tout $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ à valeurs strictement positives telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\, dx = 1.$$

Indication : On pourra utiliser la question 11.

☞ Réponse

Soit $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ à valeurs strictement positives telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\, dx = 1$.
L'application $x \mapsto h(g(x))\varphi(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ (par stricte positivité de g) et continue sur $\mathbb{R}$ par continuité de g, h, φ.

Par hypothèse sur g, il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|g(x)| \leq C\left(1 + |x|^k\right).$$

Comme $h(1) = 0$, la question précédente nous donne que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $|h(t)| \leq e^{-1}$ et h est croissante et positive sur $[1, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

— Si $g(x) < 1$, $|h(g(x))| \leq e^{-1}$.

— Si $g(x) \geq 1$, $|h(g(x))| = h(g(x)) \leq h(C(1 + |x|^k))$.

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |h(g(x))| \leq e^{-1} + h[C(1+|x|^k)] = e^{-1} + C(1+|x|^k)\left(\ln(C) + \ln(1+|x|^k)\right).$$

En utilisant une inégalité de concavité sur ln, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(1 + |x|^k) \leq |x|^k,$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |h(g(x))| \leq e^{-1} + C(1 + |x|^k)(\ln(C) + |x|^k).$$

La fonction $h \circ g$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$, elle appartient donc à $CL(\mathbb{R})$ d'après la question 1 et est continue donc on en déduit $h \circ g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. D'après la question 2, $h \circ g \in L^1(\varphi)$.
Par conséquent $x \mapsto \ln(g(x))g(x)\varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\mathrm{Ent}_\varphi(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(x))f(x)\varphi(x)\,dx \text{ est bien définie}}$.

Remarque : On n'a pas utilisé l'hypothèse $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx = 1$ pour montrer que l'intégrale est convergente mais c'est comme cela qu'est définit l'entropie dans l'énoncé.

13 ▷ Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $S(t) = \mathrm{Ent}_\varphi(P_t(f))$. Justifier que $S(t)$ est bien définie.

☞ Réponse

Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

— On a vu à la question 6 que $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$.

— $P_t(f)$ est à valeurs strictement positives : En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f est à valeurs strictement positives, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\varphi(y) > 0$ et $P_t(f)(x)$ est, par définition, l'intégrale d'une fonction continue à valeurs strictement positives d'où $P_t(f)(x) > 0$.

— Le résultat admis entre la question 6 et la question 7 nous donne directement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = 1.$$

Ainsi, $P_t(f)$ vérifie les hypothèses de la question précédente, on en déduit que $\boxed{S(t) = \mathrm{Ent}_\varphi(P_t(f)) \text{ est bien définie.}}$

14 ▷ Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Indication : On pourra au préalable montrer que, si $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto P_t(f)(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

☞ Réponse

Commençons par montrer l'indication : Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$, on considère $A(t,y) = f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\varphi(y)$.
Comme $f \in CL(\mathbb{R})$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $X \in \mathbb{R}$:

$$|f(X)| \leq C\left(1 + |X|^k\right).$$

Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégral :

- **Continuité par rapport au paramètre :** Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto A(t,y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par continuité de f.
- **Continuité par morceaux par rapport à la variable d'intégration :** Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $y \mapsto A(t,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par continuité de f.
- **Domination (indépendante de t) :** Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$|A(t,y)| = |f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\varphi(y)| \leq C(1 + (|x| + |y|)^k)\varphi(y),$$

et $y \mapsto C(1+(|x|+|y|)^k)\varphi(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (vu à la question 5).
D'après le théorème de continuité, $t \mapsto P_t(f)(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons maintenant que $S : t \mapsto \mathrm{Ent}_\varphi(P_t(f))$ est continue.
Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$F(t,x) := \ln(P_t(f)(x))P_t(f)(x)\varphi(x) = h(P_t(f)(x))\varphi(x),$$

où h est la fonction introduite à la question 11.
Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégral :

- **Continuité par rapport au paramètre :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $t \mapsto P_t(f)(x)$ est à valeurs strictement positives et continue et les deux fonctions h et φ sont continues.
- **Continuité par morceaux par rapport à la variable d'intégration :** Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto F(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par continuité de $x \mapsto P_t(f)(x)$ (d'après la question 9).
- **Domination (indépendante de t) :** Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la question 6 montre que $P_t(f)$ est majorée par une fonction polynomiale en $|x|$, indépendante de t et, d'après la question 1, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|P_t(f)(x)| \leq C\left(1+|x|^k\right).$$
Dans la question 12, on a obtenu la majoration suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |h\left(P_t(f)(x)\right)| \leq e^{-1} + C(1+|x|^k)(\ln(C)+|x|^k).$$
Ainsi,
$$|F(t,x)| = |h\left(P_t(f)(x)\right)\varphi(x)| \leq \left(e^{-1} + C(1+|x|^k)(\ln(C)+|x|^k)\right)\varphi(x).$$
On a également vu à la question 12 que l'application
$x \mapsto \left(e^{-1} + C(1+|x|^k)(\ln(C)+|x|^k)\right)\varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de continuité s'applique : $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$

15 ▷ Vérifier que l'on a :

$$S(0) = \mathrm{Ent}_\varphi(f) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} S(t) = 0.$$

☞ Réponse

Concernant la première égalité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_0(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(y)\,dy = f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,dy = f(x),$$

d'où :

$$S(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(P_0(f)(x)\right)P_0(f)(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(f(x)\right)f(x)\varphi(x)\,dx = \mathrm{Ent}_\varphi(f).$$

Pour montrer $\lim_{t\to+\infty} S(t) = 0$, on va appliquer le théorème de convergence dominée (dans le cas d'un paramètre continu).
Vérifions les hypothèses de ce théorème :

- **Continuité :** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(P_t(f)(x))\varphi(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (voir la question précédente, où on a établi la continuité de la fonction $x \mapsto F(t,x)$)
- **Convergence ponctuelle :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la question 5, on a $\lim_{t\to+\infty} P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(y)\,dy = 1$, donc :
$$\lim_{t\to+\infty} h\left(P_t(f)(x)\right)\varphi(x) = 0.$$
- **Domination (indépendante de t) :** En reprend la majoration de la question précédente : Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|h\left(P_t(f)(x)\right)\varphi(x)| \leq \left(e^{-1} + C(1+|x|^k)(\ln(C)+|x|^k)\right)\varphi(x),$$
et, comme avant, l'application $x \mapsto \left(e^{-1} + C(1+|x|^k)(\ln(C)+|x|^k)\right)\varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

d'après le théorème de convergence dominée, on a :
$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} \ln\left(P_t(f)(x)\right) P_t(f)(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

On a montré que $\boxed{S(0) = \mathrm{Ent}_\varphi(f) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} S(t) = 0.}$

16 ▷ On admet que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}\left(1 + \ln(P_t(f)(x))\right)\varphi(x)\,dx.$$
Montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(P_t(f))(x)\left(1 + \ln(P_t(f)(x))\right)\varphi(x)\,dx.$$

☞ Réponse

Comme $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ avec f' et f'' à croissance lente, la question 10 s'applique :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = L(P_t(f))(x).$$
Par conséquent,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}\left(1 + \ln(P_t(f)(x))\right)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} L(P_t(f))(x)\left(1 + \ln(P_t(f)(x))\right)\varphi(x)\,dx,$$
ce qui permet d'obtenir :
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(P_t(f))(x)\left(1 + \ln(P_t(f)(x))\right)\varphi(x)\,dx.}$$

17 ▷ En admettant que le résultat de la question 7 est valable pour les fonctions $P_t(f)$ et $1 + \ln(P_t(f))$, montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad -S'(t) = e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f')^2(x)}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\,dx.$$

☞ Réponse

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Par l'hypothèse de l'énoncé, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L\left(P_t(f)\right)(x)\left[1+\ln(P_t(f))\right](x)\varphi(x)dx$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)'(x)\left[1+\ln(P_t(f))\right]'(x)\varphi(x)dx.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left[1+\ln(P_t(f))\right]'(x) = \frac{P_t(f)'(x)}{P_t(f)(x)}$.
D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}-S'(t) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} L(P_t(f)(x))[1+\ln(P_t(f)(x))]\varphi(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)'(x)\frac{P_t(f)'(x)}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\,dx.\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f)'(x)^2}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

D'après la question 10, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_t(f)'(x) = e^{-t}P_t(f')(x)$, d'où :

$$\boxed{-S'(t) = e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f')(x)^2}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\,dx.}$$

18 ▷ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\varphi(x)\,dx.$$

☞ Réponse

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}P_t(f')(x)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy\right)^2\\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)}\cdot\frac{f'\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)}{\sqrt{f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)}}\,dy\right)^2.\end{aligned}$$

(La fonction f étant strictement positive).
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien $C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)\varphi(y)\,dy,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}&P_t(f')(x)^2\\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2}{f}\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,dy\right),\end{aligned}$$

d'où :

$$P_t(f')(x)^2 \leq P_t(f)(x) \cdot P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x).$$

Or $P_t(f)(x) > 0$, donc

$$\frac{P_t(f')^2(x)}{P_t(f)(x)} \leq P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x).$$

La question précédente et la croissance de l'intégrale permettent d'obtenir :

$$\boxed{-S'(t) = e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f')^2(x)}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\,dx \leq e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\varphi(x)\,dx.}$$

19 ▷ En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\,dx.$$

☞ Réponse

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est un élément de $C^2(\mathbb{R})$ à valeurs strictement positives tel que $\frac{f'^2}{f}$ est à croissance lente, on a $\frac{f'^2}{f} \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$.
Le résultat admis entre la question 6 et la question 7 nous donne alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\,dx$$

D'après la question précédente, on trouve :

$$\boxed{-S'(t) \leq e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\,dx.}$$

20 ▷ Établir l'inégalité suivante :

$$\mathrm{Ent}_\varphi(f) \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\,dx.$$

☞ Réponse

Notons $M := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\,dx \in \mathbb{R}$ de sorte que la question précédente s'écrive :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq e^{-2t}M.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^{+\infty} -S'(t)\,dt \leq M\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt.$$

Or, d'après la question 15,

$$\int_0^{+\infty} -S'(t)\,dt = S(0) - \lim_{t\to+\infty} S(t) = \mathrm{Ent}_\varphi(f),$$

et on calcule :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}.$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\operatorname{Ent}_{\varphi}(f) \leq \frac{1}{2} M = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \varphi(x)\, dx.}$$

Fin du problème.